LA/P - 2023-11-27 FMA

Lastnosti determinant.

Ponovimo:

1.) $\det(AB) = \det A \det B$

2.) $\det A^T = \det A$

3.) $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C$

Dokaz za 1.:

najprej obravnavajmo 2 posebna primera:

Primer 1: A je E.M.

Primer 2: A ima ničelno vrstico

Za primer 1: uporabimo lastnosti gaussove metode.

↳ če zamenjamo dve vrstici se determinanti spremeni predznak.

$$\det(P_{ij}B) = -\det B$$

↳ če eno od vrstic pomnožimo z α, se det pomnoži z α:

$$\det(E_i(\alpha)B) = \alpha \det B$$

↳ če k eni vrstici prištejemo večkratnik druge, se det ne spremeni:

$$\det(E_{ij}(\alpha)B) = \det B$$

če v te formule vstavimo $B = I$:

$$\left.\begin{aligned} \det P_{ij} &= -1 \\ \det E_i(\alpha) &= \alpha \\ \det E_{ij}(\alpha) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \det P_{ij} B &= (-1) \det B = \det P_{ij} \det B \\ \det E_i(\alpha) B &= \alpha \det B = \det E_i \alpha \det B \\ \det E_{ij} \alpha B &= (1) \det B = \det E_{ij} \alpha \det B \end{aligned}$$

$\Rightarrow \det AB = \det A \det B$, ako je A elem. matrika

za primer 2: (A ima ničelno vrstico)

↳ tedaj ima tudi AB ničelno vrstico.

↳ tedaj $\det A = 0$

tedaj $\det AB = 0$ ↲

↳ tedaj $\det AB = 0 \det B = 0 = \det A \det B$

SPLOŠEN PRIMER $\det AB = \det A \det B$:

↳ po gaussovi metodi $\exists$ take E.M. $E_1, \dots E_n$,

da je $E_n \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = RVSO(A)$

- ker je A kvadratna, je tudi $RVSO(A)$ kvadratna:

Bodi $R := RVSO(A)$

↳ tedaj je R bodisi I bodisi ima ničelno vrstico

PRIMER $R = I$:

$$\det(\underbrace{E_n \cdot \ldots \cdot E_1 A}_{R = I} B) = \det E_n \det \ldots \det E_1 \det AB$$

↳ $= \det B$

$$1 = \det R = (\det E_n \cdot \ldots \cdot E_1 A) = \det E_n \cdots \det E_1 \det A \quad / \cdot \det B$$

$$(\det B =) \cancel{\det E_n} \cdot \ldots \cdot \cancel{\det E_1} \cdot \det AB = \cancel{\det E_n} \cdot \ldots \cdot \cancel{\det E_1} \det A \det B.$$

$$\boxed{\det AB = \det A \det B}$$

za $RVSO(A) = I$, tedaj $R = I$

Posledica: $\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$ (*)

↳ Dokaz: za A je obrnljiva

$$\exists A^{-1} \Rightarrow \exists B \ni: AB = I \quad /\det$$

$$\underbrace{\det AB}_{=1} = \underbrace{\det I}_{=1}$$

↳ $\det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$

Dokaz: za A ni obrnljiva

$\nexists A^{-1} \Rightarrow \exists E_n, \dots, E_1 \ni: E_n \cdot \dots \cdot E_1 A = R$ ima ničelno vrstico

R ima ničelno vrs. $\Rightarrow \det R = 0 \Rightarrow 0 = \det R = \det E_n \cdot \dots \cdot \det E_1 \det A$

neničeln   neničeln

$$\det A = 0$$

dokazali smo (*) in tudi splošen primer.

TRDITEV $\det A^T = \det A$

Dokaz: Če je A E.M., to drži; $\det P_{ij} = -1 = \det P_{ij}^T \Leftarrow P_{ij}^T = P_{ij}$

$\det E_i(\alpha) = \alpha = \det E_{i\alpha}^T \Leftarrow E_{i\alpha}^T = E_{i\alpha}$

$\det E_{ij\alpha} = 1 = \det E_{ji\alpha}^T = \det E_{ij\alpha}^T \Leftarrow E_{ij\alpha}^T = E_{ji\alpha}$

Če ima A ničelno vrstico, to drži, saj ima tedaj A^T ničeln stolpec ↳ $\det A = 0$

↳ $\det A^T = 0$ ⟹ po razvoju po stolpcih ali vrsticah.

$$\det A = \det A^T = 0$$

Kaj pa SPLOŠEN PRIMER za $\det A = \det A^T$?

Po Gaussovi metodi $\exists E_n, \dots E_1$, da je $E_n \cdot \dots \cdot E_1 A = RVSO(A)$

Bodi $R = RVSO(A)$.

Dva primera, kot prej: $R = I$ ali R ima ničelno vrstico.

- Primer $R = I$: $\det R = \det R^T = 1$
- Primer R ima ničelno vrstico: $\det R = \det R^T = 0$.

$$\hookrightarrow \det(\overbrace{E_n \dots E_1 A}^{R}) = \det(\overbrace{E_n \cdots E_1 A}^{R})^T$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A^T \cdot E_1^T \cdots E_n^T) = \det A^T \cdot \cancel{\det E_1^T} \cdots \cancel{\det E_n^T}$$

$$\det(E_n \dots E_1 A) = \cancel{\det E_n} \cdot \dots \cdot \cancel{\det E_1} \det A$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A^T = \det A}.$$

dokazali smo splošen primer ↑

TRDITEV: $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C$

↳ zgornjetrikotna bločna matrika.

Dokaz: opazimo, da po bločnem množenju matrik velja

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Uporabimo multiplikativnost determinante

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}}_{\overset{?}{=} \det C} \underbrace{\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\overset{?}{=} \det A}$$

I_n

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + 0 + \dots + 0 =$$

$$= \det \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \dots = \underline{\underline{\det C}}$$

kot prej.

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I\end{bmatrix} = \det\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right] = \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix} = \det A$$

z uporabo elementarnih transformacij $E_{ij}\alpha$, ki ne spremenijo det.

$\square$.

CRAMERJEVO PRAVILO.

Radi bi rešili kvadratni sistem linearnih enačb.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

oz. v matrični obliki

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Izpeljali bomo eksplicitne formule za $x_1, \dots x_n$.

Ideja:

matrika koeficientov

identična matrika, kjer smo i-ti stolpec zamenjali z $\vec{x}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & x_i & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & x_n & & 1\end{bmatrix}}_{I_i(\vec{x})} = \begin{bmatrix} a_{xx} & \cdots & a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n & \cdots & a_{xx} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{xx} & \cdots & a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n & \cdots & a_{xx}\end{bmatrix} \begin{matrix} \to b_1 \\ \vdots \\ \to b_n \end{matrix}$$

$\vec{b}$

$\hookrightarrow$ matrika koeficientov, v kateri smo i-ti stolpec zamenjali z $\vec{b}$.

$A_i(\vec{b})$

$$A \cdot I_i(\vec{x}) = A_i(\vec{b}) \quad /\det$$

$$\det(A I_i(\vec{x})) = \det(A_i(\vec{b}))$$

$$\det A \det I_i(\vec{x}) = \det A_i(\vec{b})$$

$\to$ Izračunajmo $\det I_i(\vec{x})$ z razvojem po i-ti vrstici:

$$\boxed{\det A\, x_i} = \det A_i(\vec{b})$$

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i \vec{b}}{\det A}}$$ formula za rešitev x_i.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & x_i & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot 0 \cdot \det \ldots + \ldots + \ldots + (-1)^{i+i} x_i \det I + (-1)^{2 \cdot i+1} \cdot 0 \cdot \det \ldots + \ldots = (-1)^{i+i} x_i \det I = \boxed{x_i}$$

i-ta vrstica

Povzetek (Cramerovo pravilo):

rešitev sistema s kvadratno matriko koeficientov je podana s formulo $x_i = \frac{\det A_i \vec{b}}{\det A}$, kjer $i = 1, \ldots, n$.

Primer: Reši 2x2 sistem

$$2x + 3y = 4$$
$$5x + 6y = 7$$

s Cramerjevim pravilom.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad A_1(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad A_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$\det A = -3$ $\quad \det A_1(\vec{b}) = 24 - 21 = 3$ $\quad \det A_2(\vec{b}) = 14 - 20 = -6$

$$x_1 = \frac{3}{-3} = -1 \quad x_2 = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

FORMULA ZA INVERZ MATRIKE:

Imamo $A_{n \times n}$, iščemo X, da velja $AX = I$

vemo, da $AX = I \Rightarrow XA = I$

$\Downarrow$

torej $X = A^{-1}$

načrt:

najprej prevedi na reševanje sistemov linearnih enačb

nato uporabi Cramerovo pravilo

končno poenostavi dobljene formule.

let $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$ stolpci X in $\vec{i}_1, \ldots \vec{i}_n$ stolpci I.

potem je $[A\vec{x}_1 \ldots A\vec{x}_n] = A[\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n] = AX = I = [\vec{i}_1 \ldots \vec{i}_n]$

primerjamo stolpce na obeh straneh:

množina

... sistem ... ...

te sisteme enačb bomo rešili s Cramerjevim pravilom:

$A\vec{x}_1 = \vec{i}_1 \quad , \dots , \quad A\vec{x}_n = \vec{i}_n$

z.d.b za vsak stolpec X smo dobili sisteme linearnih enačb sistemi $n \times n$

j-ti stolpec

$$
X = \begin{bmatrix} x_{11} \cdots & x_{1j} & \cdots x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i1} \cdots & x_{ij} & \cdots x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} \cdots & x_{nj} & \cdots x_{nn} \end{bmatrix}
$$

i-ta vrstica

rešimo $A\vec{x}_j = \vec{i}_j$

$$
x_{ij} = (\vec{x}_j)_i = \frac{|\det A_i(\vec{i}_j)|}{\det A} = \frac{\det A_{ji} \cdot (-1)^{j+i}}{\det A}
$$

izračunajmo $\det A_i(\vec{i}_j)$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
A_i(\vec{i}_j) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ & 1 & \\ & 0 & \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

j-ta vrstica

i-ti stolpec

dobimo $\det A_i(\vec{i}_j) = (-1)^{j+i} \cdot 1 \cdot \det A_{ji}$

$= \det A_{ji} \cdot (-1)^{j+i}$

torej formula za inverz (X) je:

$$
x_{ij} = \frac{\det A_{ji} \cdot (-1)^{j+i}}{\det A}
$$

$$
X = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\det A_{11}(-1)^{1+1}}{\det A} & \cdots & \frac{\det A_{n1}(-1)^{1+n}}{\det A} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\det A_{1n}(-1)^{1+n}}{\det A} & \cdots & \frac{\det A_{nn}(-1)^{n+n}}{\det A} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \det A_{11}(-1)^{1+1} & \cdots & \det A_{1n}(-1)^{1+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \det A_{n1}(-1)^{1+n} & \cdots & \det A_{nn}(-1)^{n+n} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}}{}^{T}
$$

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^{T}
$$

$\tilde{A}$ pravimo „kofaktorska matrika".