LA1 DN4 FMF 2023-12-26 Anton Luka Šijanec
63230317 as82306@student

1. Reši enačbo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+2 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 6 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 6 & x+1 \end{vmatrix} = 3x(x+1)+6 = 3x^2+3x+6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+2 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+2 & x+4 & x+5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x-1 & -x-1 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+2 & x+4 & x+5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1)\underbrace{\begin{vmatrix} -x & -x-1 & -x-1 \\ x+2 & x+4 & x+5 \\ -5 & -7 & 9 \end{vmatrix}}_{\text{izračunal s sage math}} + \underbrace{\begin{vmatrix} -x & -x-1 & -x-1 \\ 2 & x+3 & 4 \\ -5 & -7 & -9 \end{vmatrix}}_{\text{podobno izračunal s sage math.}} = -x-1+4x^2-5x+1 = 4x^2-6x$$

izračunal s sage math:

```
matrix(SR, 3, 3, [-x, -x-1, -x-1, x+2, x+4, x+5, -5, -7, 9]).determinant().full_simplify()
```

$$4x^2-6x = 3x^2+3x+6$$
$$x^2-9x-6=0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+24}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$x_1 = \frac{9+\sqrt{105}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9-\sqrt{105}}{2}$$

2. Dokaži, da je preslikava $x \mapsto x^{-1}$ avtomorfizem grupe natanko tedaj, ko je grupa komutativna.

$$f(x)=x^{-1} \text{ je avtomorfizem} \Leftrightarrow \forall a,b \in M: a \cdot b = b \cdot a$$

Dokaz:

1) enota se preslika v enoto.

$$e \cdot e^{-1} = e \quad (\text{definicija inverza } a \cdot a^{-1} = e)$$
$$e \cdot e^{-1} = e^{-1} \quad (\text{definicija enote } e \cdot a = a)$$
$$\Rightarrow e = e \cdot e^{-1} = e^{-1} \quad \checkmark$$

2.) Da je preslikava bijektivna, moramo dokazati, da so v komutativni grupi inverzi enolični, da dva elementa nimata istega inverza.

let $(M, \cdot)$ grupa

let $a^{-1} = b^{-1}$. Dokažimo $a=b$.

$b \cdot b^{-1} = e$

$a \cdot a^{-1} = e$

$a \cdot a^{-1} = e$

$a \cdot b^{-1} = e \quad / \cdot b$

$a \cdot e = e \cdot b$

$a = b$ ✓

3.) dokaz ohranjanja inverzov: $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$

$(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}$

ob upoštevanju 2.) $\quad x = x$ ✓

4.) asociativnost operacije:
zahtevamo, da operacija ostane enaka, zato je asociativna ✓

5.) po definiciji homomorfizma je treba dokazati, da

$\forall a,b \in M: \left(f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)\right) \Leftrightarrow$ grupa je abelova.

let a,b poljubna iz grupe $(M, \cdot)$

Lema 1: V grupi $(N, \circ)$ velja za poljubna $x, y \in N$:

$\underline{(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}}$. Dokaz:

$(x \circ y)$ & $(x \circ y)^{-1} \stackrel{?}{=} y^{-1} \circ x^{-1}$

$(x \circ y)(x \circ y)^{-1} \stackrel{?}{=} (x \circ y)(y^{-1} \circ x^{-1})$

$e \stackrel{?}{=} x \circ e \circ x^{-1}$

$e \stackrel{?}{=} x \circ x^{-1}$

$e \stackrel{\checkmark}{=} e$ ✓

$f(a \cdot b) \stackrel{?}{=} f(a) \cdot f(b)$

$b^{-1} \cdot a^{-1} \stackrel{\text{lema 1}}{=} (a \cdot b)^{-1} \stackrel{?}{=} a^{-1} \cdot b^{-1}$

$b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ velja natanko tedaj, ko je grupa Abelova.

1.), 2.), 3.), 4.) veljajo ne glede na to, ali je grupa komutativna ali ne,
5.) pa velja natanko tedaj, ko je grupa komutativna.

□

3. Prepričaj se, da je množica $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ komutativen kolobar na operaciji

abseg

$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

$(a,b) \otimes (c,d) = (ac, bd)$!

Poišči tudi vse delitelje niča, tj. neničelne elemente (a,b), da velja $(a,b) \otimes (c,d) = 0 \; (= e_\oplus)$ za nek neničeln (c,d).

Dokažimo distributivnost!

$(a,b) \otimes ((c,d) \oplus (e,f)) \stackrel{?}{=} (a,b) \otimes (c,d) \oplus (a,b) \otimes (e,f)$

$(a,b) \otimes ((c,d) \oplus (e,f)) \ldots$

$(a,b) \otimes (c+e, d+f) \stackrel{?}{=} (ac, bd) \oplus (ae, bf)$

$(a \cdot (c+e), b(d+f)) \stackrel{?}{=} (ac+ae, bd+bf)$

velja, ker je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ distributiven bigrupoid.

Dokažimo $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \oplus)$ je Abelova grupa:

↳ komutativnost:

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: \quad (a,b)\oplus(c,d) = (c,d)\oplus(a,b)$

$(a+c, b+d) = (c+a, d+b)$

Velja, ker je $(\mathbb{Z}, +)$ komutativen grupoid.

↳ notranja operacija:

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: \quad (a,b)\oplus(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$(a+c, b+d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Velja, ker je $(\mathbb{Z}, +)$ grupoid.

↳ asociativnost

$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: \quad (a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f)) = ((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f)$

$(a+(c+e), b+(d+f)) = ((a+c)+e, (b+d)+f)$

Velja, ker je $(\mathbb{Z}, +)$ grupoid.

↳ enota

$\exists e \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ni: \forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: \quad (a,b)\oplus e = (a,b)$

let $e := (0,0)$. $\quad (a,b)\oplus(0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$

Velja, ker je 0 enota v $(\mathbb{Z}, +)$.

↳ inverzi

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ \exists t \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ni: (a,b)\oplus t = e_\oplus = (0,0)$

let $t := (-a, -b)$ $\quad (a,b)\oplus(-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0) = e_\oplus$

Velja, ker je $(\mathbb{Z}, +)$ grupa.

Dokažimo komutativnost $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \otimes)$:

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: \quad (a,b)\otimes(c,d) \stackrel{?}{=} (c,d)\otimes(a,b)$

$(ac, bd) = (ca, db)$

Velja, ker je $(\mathbb{Z}, \cdot)$ komutativen grupoid

Vsi delitelji niča $= \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z};\ (a,b)\otimes(c,d) = e_\oplus = (0,0)\}$:

če je $c = 0$ in $d \neq 0$:

$(a,b) = \{(a,0);\ a \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}$

če je $c \neq 0$ in $d = 0$:

$(a,b) = \{(0,a);\ a \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}$

---

4. S pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma izračunaj $\gcd(x^5 + 2x^4 - x^2 + 1,\ x^4 - 1)$ in ga izrazi kot linearno kombinacijo teh dveh polinomov.

REA:

$-1: \quad r_{-1} = a \quad s_{-1} = 1 \quad t_{-1} = 0$

$0: \quad r_0 = b \quad s_0 = 0 \quad t_0 = 1$

$i: \quad k_i = r_{i-2} // r_{i-1} \quad (r_i, s_i, t_i) = (r_{i-2}, s_{i-2}, t_{i-2}) - k_i \cdot (r_{i-1}, s_{i-1}, t_{i-1})$

ko je $r_{n+1}=0$, je rezultat (r_n, s_n, t_n).

(računal sem z jezikom R:
- MASS: fractions
- pracma: polydiv, polymul
- base: lapply)

r	s	t	k
[1 2 0 -1 0 1]	1	0	
[0 1 0 0 0 -1]	0	1	[1 2]
[-1 1 3]	1	[-1 -2]	[-1 -1 -4]
[7 11]	[1 1 4]	[-1 -3 -6 -7]	$\left[-\frac{1}{7}\ \ \frac{18}{49}\right]$

REA rezult: $\boxed{\left[\frac{-51}{49}\right]\left[\frac{1}{7}\ \frac{-11}{49}\ \frac{10}{49}\ \frac{-23}{49}\right]\left[\frac{-1}{7}\ \frac{-3}{49}\ \frac{12}{49}\ \frac{10}{49}\ \frac{4}{7}\right]}$

0

$$\gcd(x^5+2x^4-x^2+1,\ x^4-1) = \boxed{\frac{-51}{49}} \cdot 49 = -51$$

polinom iz $\mathbb{Q}[x]$

↳ polinom iz $\mathbb{Z}[x]$

$$\left(\frac{1}{7}x^3 - \frac{11}{49}x^2 + \frac{10}{49}x - \frac{23}{49}\right)(x^5+2x^4-x^2+1) +$$
$$+\left(\frac{-1}{7}x^4 - \frac{3}{49}x^3 + \frac{12}{49}x^2 + \frac{10}{49}x + \frac{4}{7}\right)(x^4-1) = \frac{-51}{49} \qquad / \cdot 49$$

$$(7x^3 - 11x^2 + 10x - 23)(x^5 + 2x^4 - x^2 + 1) + (-7x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 10x + 28) = -51$$