KOMBVFMF 2025-01-07

zamudil prvo uro.

$A =$ množica odprtih intervalov

delna urejenost: $(a,b) \leq (c,d) \iff b \leq c$ ali $a=c$ in $b=d$

Graf intervalov G_A intervalov A:

$V(G_A) = A$

$(u,v) \in E(G_A) \iff u \cap v \neq \emptyset$

nariši graf iz točke c

graf G je popoln, če je za vsak njegov inducirani podgraf H velikost največje klike v H enaka kromatičnemu številu H.

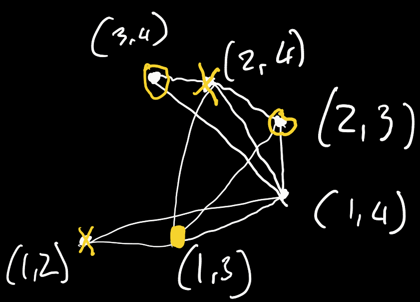
klika ... poln graf

$\omega(G)$ ... velikost največje klike v G

$\chi(G)$ ... kromatično št. grafa G

očitno $\omega(G) \leq \chi(G)$

Trditev: za vsako končno množico intervalov je graf intervalov G_A popoln.



klika v grafu G_A ustreza antiverigi v delni urejenosti verige v A pa so neodvisne množice v G_A oziroma klike v $\overline{G_A}$.

<u>Trditev:</u> A je končna neprazna množica intervalov.

$\Rightarrow G_A$ je popoln.

<u>Dokaz:</u> bot H induciran podgraf G_A.

$$\underline{\omega}(\underline{H}) = \underline{\chi}(H)$$ velja $G_{V(H)} = H$ ✓

očitno velja, da je $\overline{V(H)} \subseteq A$. in delna urejenost se ohrani, ker

remo $\omega(G_A)$ = velikost največje antiverige.

|| dilworth: velikost največje antiverige

A je najmanjše št. verig, s katerimi lahko pokrijemo A.

$\Downarrow$ verige so pa lahko iste barve, ker so neodvisne množice v G_A

pokritje z verigami ustreza barvanju.

<u>Spernerjev izrek</u>

Širina B_n je $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ oziroma

$$A_1, \dots, A_m \subseteq [n]$$

naj velja $A_i \not\subseteq A_j$ za $i \neq j$ $\Rightarrow m \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

B_n je delna urejenost $\left(2^{[n]}, \subseteq\right)$

$\downarrow$

$P([n]) \to$ boolova algebra

N

Let $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$; $\{p_i\}_{i \in [n]}$ so različna praštevila,

$\Longrightarrow$ N ima največ $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ deliteljev, od katerih nobeden ne deli drugega.

delitelji so $2^{[n]}$. $\sim$ $A \subseteq 2^{[n]}$ ustreza delitelju $\prod_{a \in A} p_a = d_A$.

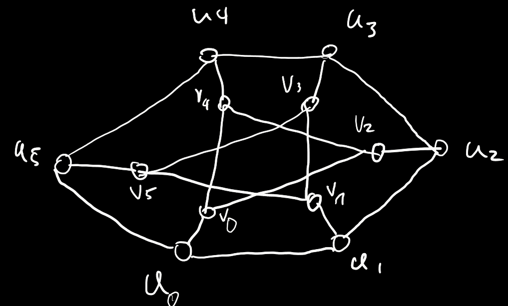
$$d_A \mid d_B \Leftrightarrow A \subseteq B .$$

Vzemimo $d_{A_1}, \dots, d_{A_k}$, nobeden ne deli drugega

$$\Rightarrow A_i \not\subseteq A_j \text{ za } i \neq j \xRightarrow[\text{Sperner}]{} k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

N

$P(6,2)$



G je grupa avtomorfizmov, ki deluje na presane G.

Določi G i orbito, stabilizator, velikost grupe

- ciklični indeks

Gu_0 -- orbita u_0

$Gu_0 = \{u_0, \overset{\rho}{\underset{\vee}{u_1}}, u_2, u_3, u_4, \overset{\rho^5}{\underset{\vee}{u_5}}\}$

$\rho = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$

v_i ni v orbiti Gu_0, ker v_i leži na 3ščitu, u_0 pa ne.

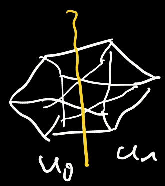
stabilizator

$$G^{u_0} = \{\pi \in G \,;\, \pi u_0 = u_0\} = \{\overbrace{(u_1u_5)(u_2u_4)(v_1v_5)(v_2v_4)}^{J_{u_0}\ \text{zrcaljenje}}, id\}$$

$$|G| = |Gu_0| \cdot |G_{u_0}| = 6 \cdot 2 = 12$$

$$G = \{id, \rho, \dots, \rho^5, J_{u_0}, J_{u_1}, J_{u_2}, \sigma_{u_0u_1}, \sigma_{u_1u_2}, \sigma_{u_2u_3}\}$$

zrcaljenje čez



po povezavah:

$$\rho = (u_0u_1\ \ u_1u_2\ \ u_2u_3\ \ u_3u_4\ \ u_4u_5\ \ u_5u_0)\cdot$$
$$\cdot(v_0v_2\ \ v_1v_3\ \ v_2v_4\ \ v_3v_5\ \ v_4v_0\ \ v_5v_1)\cdot$$
$$\cdot(u_0v_0\ \ u_1v_1\ \ u_2v_2\ \ u_3v_3\ \ u_4v_4\ \ u_5v_5)$$

3 cikle dolžine 6: t_6^3 v Z_G.

$\rho^2 = \dots$ 6 ciklov dolžine 3: t_3^6

$\rho^3 =$ 9 ciklov dolžine 2: t_2^9

ρ^4 : t_3^6

ρ^5 : t_6^3

zrcaljenje

$$J_{u_0u_3} = (u_0u_1\ \ u_1u_5)(u_1u_2\ \ u_4u_5)(u_2u_3\ \ u_3u_4)\cdot$$
$$\cdot(v_0v_2\ \ v_0v_4)(v_1v_3\ \ v_5v_3)\cdot(u_1v_1\ \ u_5v_5)(u_2v_2\ \ u_4v_4)$$

$\sigma_{u_0 u_1}$: $x_1^2 x_2^8$

$$Z_G(x_1, \dots x_{18}) = \frac{1}{12}\left(x_1^{18} + 2x_6^3 + 2x_3^6 + x_2^9 + 3x_2^7 x_1^4 + 3x_1^2 x_2^8\right)$$

N

Na koliko načinov lahko usmerimo povezave $P(6,2)$ ob upoštevanju simetrij?

tip permutacije	# permutacij	# negibnih točk	
id	1	2^{18}	vsako od 18 povezav na 2 načina
ρ, ρ^5	2	2^3	$\forall$ od 3 ciklov določimo
ρ^2, ρ^4	2	2^6	usmeritev ene povezave, ostalo določeno
ρ^3	1	2^9	
$\tilde{\sigma}_{u_0, u_3}$	3	0	$v_1 v_5 \Leftrightarrow v_5 v_1$
$\sigma_{u_0 u_1}$	3	0	— ‖ —

$$\# \text{orbit} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{12}\left(2^{18} + 2\cdot 2^3 + 2\cdot 2^6 + 2^9\right) = 21900$$

sedaj barvamo z Rdečo, modro, zeleno, vsaka
R M Z

barva ima 6 povezav

tip perm	#permutacij	#negibnih točk za barvanje
id	1	R $\binom{18}{6}$ M $\binom{12}{6}$
ρ, ρ^5	2	cikel cikel R $3 \cdot 2$ M
ρ^2, ρ^4	2	2 cikla 2 cikla R $\binom{6}{2}$ $\binom{4}{2}$ M
ρ^3	1	$\binom{9}{3}\binom{6}{3}$
$\sigma_{u_0 u_3}$	3	$\binom{7}{3}\left(\binom{9}{3}+\binom{4}{2}\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\right)+\binom{7}{2}\binom{9}{2}\left(\binom{5}{3}+\binom{5}{2}\right)+\binom{7}{1}\binom{6}{3}$
$\sigma_{u_0 u_1}$	3	podobno