KOMB V FMF 2024-10-08 asist. Arjana Žitnik

knjiga Juvan Potočnik: Teorija grafov in kombin.

kolokvij: 21. november 2024, četrtek, 2.05

16:00

N

Koliko je različnih nizov dolžine 3 iz znakov abcdef?

a) brez ponavljanja

b) ponavljanje

c) ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo a

d) ponavljanje in vsebujejo a.

a) $6\cdot5\cdot4=120$ b) $6^3=216$ c) $3\cdot5\cdot4=60$ d) $\overbrace{6^3}^{\text{vse}}-\overbrace{5^3}^{\text{take brez a}}=91=\underbrace{6\cdot6}_{\text{prvi a na 1. mestu}}+\underbrace{5\cdot6}_{\text{2. mestu}}+\underbrace{5\cdot5}_{\text{3. mestu}}=$

$$=\underbrace{1}_{\text{3 aji}}+\underbrace{\binom{3}{2}\cdot5}_{\text{2 aja}}+\underbrace{\binom{3}{1}\cdot5\cdot5}_{\text{en a}}$$

N

Koliko 4-mestnih števil ima različne števke?

a) ↑

b) kaj če so liha?

c) soda?

a) $9\cdot9\cdot8\cdot7=4536$ b) $\overset{\text{nato določi}}{8}\cdot\underbrace{8\cdot7}^{\text{nazadnje}}\cdot\overset{\text{najprej določi}}{5}=2240$ c) vse − liha $=2296$

N

Koliko deliteljev ima število 360?

$$360=2^3\cdot3^2\cdot5$$

$$4\cdot3\cdot2=24 \text{ deliteljev}$$

N

Koliko je različnih $\{0,1\}$ matrik z m vrsticami in n stolpci?

a) ↑

b) + vse vrstice so različne.

a) 2^{mn} b) $(2^n)(2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-m+1)=(2^n)^{\underline{m}}$

N

Na koliko načinov lahko izplačamo m evrov z bankovci 5, 10, 20 evrov?

case $\neg(5 \mid m) \Rightarrow 0$ možnosti

case $5 \mid m \Rightarrow$ let $n = m/5$ in kovanci $:= 1, 2, 4$

a.) le kovanci za 1€: 1 način $-$ n kovancev

b.) 1 in 2 kovanci: največ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dvojk in najmanj 0, torej

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \text{ načinov}$$

c.) $1, 2, 4$ kovanci:

- 0 štiric: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ načinov
- 1 štirica: $\left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + 1$ načinov
- 2 štirici: $\left\lfloor \frac{n-8}{2} \right\rfloor + 1$ načinov
- i štiric: $\left\lfloor \frac{n-4i}{2} \right\rfloor + 1$ načinov

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n-4i}{2} \right\rfloor + 1 \right) \text{ načinov}$$

case $n = 4k$:

$$\sum_{i=0}^{k} \left| 2(k-i) + 1 \right| = \frac{(k+1)(2k+1+1)}{2} = (k+1)(k+1) = (k+1)^2$$

case $n = 4k+1$:

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\left\lfloor \frac{4k+1-4i}{2} \right\rfloor + 1 \right) = \sum_{i=0}^{k} \left(2(k+i) + 1 \right) = (k+1)^2$$

case $n = 4k+2$:

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{4k+2-4i}{2} + 1 \right) = \sum_{i=0}^{k} \left(2(k+1) \perp (+1) \right) = (k+1)^2 + k + 1 = (k+1)(k+2)$$

case $n = 4k+3$:

$-||-$

$$\hookrightarrow N = \begin{cases} (k+1)^2 \; ; & n=4k \;\vee\; n=4k+1 \\ (k+1)(k+2) \; ; & n=4k+2 \;\vee\; n=4k+3 \end{cases}$$

Dirichletovo načelo:

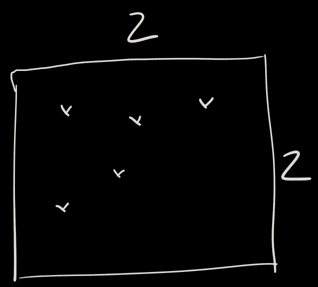
let $|X|>|Y| \Rightarrow \nexists$ inj fja $X \to Y$

---

n golobic, m škatel

če $n>m$, sta v vsaj eni škatli vsaj 2 golobici.

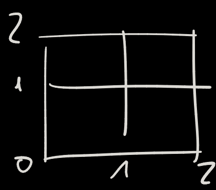
N



x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 točke.

dokaži, da sta vsaj dve oddaljeni za kvečjemu $\sqrt{2}$.

dirichlet:



4 kvadratki.

v vsaj enem območju sta vsaj dve točki.

N

Tabela 5×5 ; $x_{ij} \in \{-1,0,1\}$

dokaži, da sta vsaj dve izmed vsot po vrsticah, stolpcih in glavnih diagonalah enaki.

možne vsote: $\{5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5\}$

#: 11

diagonal : 2
vrstic : 5
stolpcev : 5

skupaj : 12

DIRICHLET:

$12 > 11$

N

let $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{Z}$, $|A| = n+1$. Pokaži, da A vsebuje par števil, katerih razlika je deljiva z n.

$$\exists x, y \in A \ni: n \mid (x-y)$$

$$x = k_1 \cdot n + o_1$$
$$y = k_2 \cdot n + o_2$$
$$x - y = n(k_1 - k_2) + o_1 - o_2$$

$n \mid x-y \iff o_1 = o_2$ ZOB $x-y$ je deljiv z n, če sta ostanka pri deljenju x, y z n ista.

let $X = A$
$Y = \{0, \dots, n-1\}$ ostanki.

ker po dirichletu iz $|A| = n+1$ in $|Y| = n$ sledi, da $\nexists f: X \to Y$ inj $\Rightarrow \exists$ 2 št. v $A \ni$:

$x \bmod n = y \bmod n \iff n \mid (x-y)$. $\square$

b.) let $A \subseteq \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, n liho, $|A| = \frac{n+3}{2}$.

$$\exists x, y \in A, x \neq y \ni: n \mid (x-y) \lor n \mid (x+y)$$

$$x = k_1 n + o_1$$
$$y = k_2 n + o_2$$

$$x + y = n(k_1 + k_2) + o_1 + o_2$$

$$n \mid x+y \iff n \mid o_1 + o_2 \iff o_1 = o_2 = 0 \lor o_1 + o_2 = n$$

$X = A$
$Y = \{0, \dots, \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$

$$f: X \to Y: \quad x \mapsto \begin{cases} x \bmod n & ; x \bmod n \leq \frac{n-1}{2} \\ n - x \bmod n & ; x \bmod n > \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

$|Y| < |X| \Rightarrow$ ne obstaja injekcija

(b) $\exists x,y;\ x \neq y : fx = fy \Rightarrow \begin{cases} x \bmod n = y \bmod n \Rightarrow n \mid x-y \\ \text{sicer} \Rightarrow n \mid x+y \end{cases}$

Posplošeno dirichletovo načelo:

n kroglic
m škatel.

$\forall\ r \in \mathbb{N}$ če $n > r \cdot m \Rightarrow$ v vsaj eni škatli je vsaj $r+1$ kroglic

---

N

V nekem podjetju je 37 oseb. Pokaži, da $\exists$ mesec, v katerem imajo vsaj 4 rojstni dan.

$n = 37$

$m = 12$

$r = 3$

$n > 3 \cdot 12 = 36$

$\boxed{37 > 36}$!!! $\square$

WOW

N

Soba oblike $3 \times 4 \times 3\ m^3$. Pokažite, da v vsakem trenutku $\exists$ 4 muhe znotraj krogle z radijem 90 cm. Muh je 110.

$3 \times 4 \times 3 = 36$

$|x|$ kroglice: muhe : 110

$|y|$ škatle: kocke $1 \times 1 \times 1$: 36

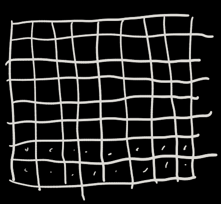
$4 \cdot |y| = 108 < 110$ ✓

NTS: koliko je največji radij?

N

Šahovnica 8×8

17 trdnjav

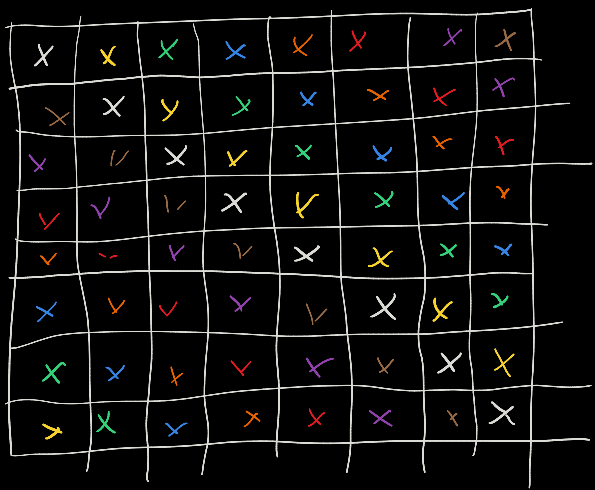


a.) vsaj v 1 vrstici so 3 trdnjave

b.) $\exists$ vsaj 3 trdnjave, ki se med seboj paroma ne napadajo

a.) trdnjav: 17 $2 \cdot 8 = 16$ $16 < 17$!!!
vrstic: 8

b.) štatle nenapadanja:



8 štatel.

N
52 kart, karta je določena z barvo in vrednostjo
4: ♡, ◇, +, ↑   2..10, F, D, K, AS

koliko kart moramo izvleči, da bodo:

a.) vsaj tri iste barve $4 \cdot 2 + 1$
b.) vsaj trije križi $3 \cdot 13 + 3$
c.) vsaj tri križe in vsaj tri srca $3 \cdot 13 + 3 = 42$
d.) vsaj po dve karti iste barve $3 \cdot 13 + 2 = 41$