KOMB PFMF 2025-01-13

G graf

A matrika sosednosti $\quad A \in K^{p\times p}$

$$F_{ij}(x) = \sum_n A_{ij}(n) x^n \qquad A_{ij}(n) = \sum w(\Gamma)$$

Γ sprehodi od v_i do v_j dolžine n

$$F_{ij}(x) = (I - xA)^{-1}_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(I-xA)_{ji}}{\det(I-xA)}$$

a brez ji

$$\det(I - xA) = \det\left((-x)(A - x^{-1}I)\right) = (-x)^p \det(A - x^{-1}I) = \dots$$

$\det(A - \lambda I)$ karakteristični polinom se razcepi na

$$= (-1)^p (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_p) =$$

$$= (-1)^p \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_{n_0}\lambda^{n_0}$$

upoštevamo tak, da je njegov koeficient neničeln.

$$\dots = (-x)^p (-1)^p (x^{-1} - \lambda_1)\cdots(x^{-1} - \lambda_p) = x^p (x^{-1} - \lambda_1)\dots(x^{-1} - \lambda_p) =$$

$$= (1 - \lambda_1 x)\dots(1 - \lambda_p x) = (-x)^p \left((-1)^p (x^{-1})^p + a_{p-1}(x^{-1})^{p-1} + \dots + a_{n_0}(x^{-1})^{n_0}\right) =$$

$$= 1 + (-1)^p a_{p-1} x + \dots + (-1)^p a_{n_0} x^{p-n_0}$$

---

polinom stopnje $p - n_0$

$\det(I - xA)^{ji}$ ... polinom stopnje $< p$

$F_{ij}(x)$ ... racionalna f-ja stopnje $< p-(p-n_0)=n_0$

n_0 ... kratnost 0 v karakterističnem polinomu.

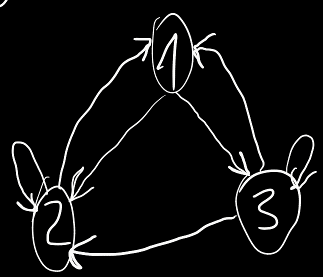
Primeri: (1) nizi dolžine n z znaki 1, 2, 3, pri čemer ne dovolimo substringa "11" ali "23".

$a_1 = 3$

$a_2 = 7$ ↑ 111 štejemo dvakrat

$a_3 = 27-(4\cdot 3-1)=16$

končni avtomat:



sprehod na tem grafu nam da veljaven niz

matrika sosednosti

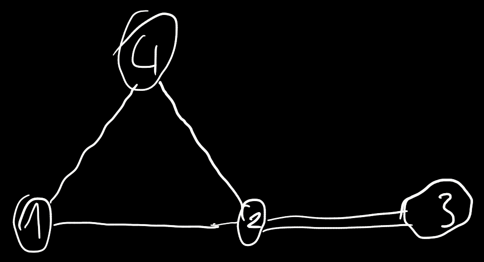
$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$(I-xA)^{-1} = \frac{1}{1-2x-x^2+x^3}\begin{bmatrix}(1-x)^2 & \cdots \\ \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

$$\sum_n a_n x^n = x\sum_{i,j\in\{1..3\}} F_{ij}(x) = \frac{(\text{vsota elementov})}{1-2x-x^2+x^3}\cdot x = \ldots$$

ker sprehod dolžine n ustreza nizu dolžine $n+1$

$$\ldots = \frac{3+x-x^2}{1-2x-x^2+x^3}\cdot x$$



a.) najdi matriko sosednosti

b.) najdi matriko za sprehode dolžine 3

c.) rodovna f-ja za sprehode od i do j

d.) -||- 1 do 4

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b.) A^3 c) $\dfrac{(-1)^{i+j} \det(I - xA)^{ji}}{\det(I - xA)}$

d.) $$\frac{-\det(I - xA)^{41}}{\det(I - xA)} = \dots = \frac{2x^2 + 2x^3}{1 - 7x^2 - 2x^2 + 4x^4}$$

3.) 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, ...

Conwayjevo look-and-say zaporedje.

vsebuje števila med 1 in 3.

dolžine? 1, 2, 2, 4, 6, 6, 8, 10, 14, 20, ...

L_n ... dolžina n-tega člena

izgleda, da $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = 1{,}30\dots$

opiši število λ.

števila

$\frac{1}{2}$ racionalne

iracionalna

zaprta za vsoto

$\sqrt{2}$ algebraična

e transcendentna

z racion. koef

$\exists$ polinom $p \ni: p(\alpha) = x$

izkaže se, da je λ algebraično. algebraična števila imajo red — stopnjo najmanjšega polinoma, katerega ničla je to število.

red λ je 71.

izkaže se, da so od enega člena naprej členi spoj natanko izmed 92 „osnovnih" zaporedij, natančni členi pa so odvisni od tega zapisa.

		length	gen
(1)	1112	4	(63)
(2)	1112133	7	(64)(62)
(3)	111213322112	12	
⋮	⋮	⋮	
(62)	3	1	
(63)	3112	4	
(64)	3112112	7	
⋮	⋮	⋮	
(91)	312…112	27	
(92)	32112	5	

dolžina 5 5

8. člen se zapiše kot (24)(39) → (83)(9)

dolžina 6 8

$$v_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_9 = T V_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

24. mesto
39. mesto
9. mesto
83. mesto

$V_n = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$ → na i-tem mestu je dolžina (i). št. pojavitev i v n-tem členu zaporedja.

$$T = \begin{array}{c|c|} & j \\ \hline i & C_{ij}\frac{l_i}{l_j} \\ \hline \end{array}$$

C_{ij} = kolikokrat se pojavi (i) v razvoju (j)

$$\begin{array}{ccc} & 24 & 39 \\ 9 & & \\ 83 & 1\cdot\frac{6}{5} & \end{array}$$

$$a_{n+8} = [1 \; \cdots \; 1] \, T^n v_8 = [1 \cdots 1] \, P D^n P^{-1} v_8 =$$

$$= c_1\lambda_1^n + \dots + c_{92}\lambda_{92}^n$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_1$$

$1{,}30\ldots$ je največja ničla karakt. pol.

T: $\lambda^{12}(\lambda+1)(\lambda-1)^2(\lambda^{71} - \lambda^{69} - 2\lambda^{68} \cdots)$

nota: en pisni da dve popravljanji ustnega
če naredimo s kolokviji, gremo
lahko na izpit, šteje pa se boljša
a je treba ob ustnem reči prof,
da ne upošte ocene