KOMB P FMF 2025-01-06

Dilworthov izrek

širina delno urejene množice = minimalno število disjunktnih verig, s katerimi lahko pokrijemo to delno urejeno množico.

velikost največje antiverige

Opomba:

Naj G graf. $M \subseteq E(G)$ je prirejanje (angl. matching), če velja:

$e, f \in M,\ e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset$

prirejanje

ni prirejanje

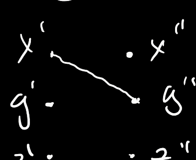
pri optimizacijskih metodah: $\exists$ učinkovit algoritem, ki najde največje prirejanje v (dvodelnem) grafu.

$\exists$ v splošnem, dotaknili bomo le za dvodelne grafe.

Naj P DUM. Konstruirajmo dvodelen graf.

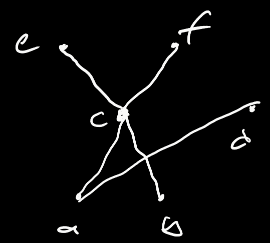
vozlišča: dve kopiji P

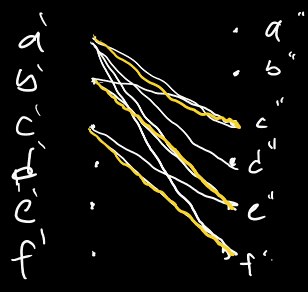
povezave: $x < y$ v $P \Rightarrow x'$ in y'' povezana



NTS NIKA LEON ŠIRINA

primer: za P:





v največjem prirejanju so 3 povezave |||

največje prirejanje, se izkaže, je najmanjše pokritje z verigami.

ena veriga $\{a \prec c \prec f\} = C_1$

druga veriga $\{b \prec e\} = C_2$

tretja veriga $\{d\} = C_3$

[6.2 Spernerjev izrek]

↳ [š]

Lema: $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

v pascalovem trikotniku so vsi elementi na vrstici največ tolikšni kot srednji

dokaz:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(k+1)!}\cancel{(n-k+1)!}}{\cancel{n!}} = \frac{k+1}{n-k} \geq 1$$

kdaj?

$$2k \geq n-1 \iff k+1 \geq n-k$$

Torej je $\binom{n}{k}$ največji, ko je $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

opomba: zaporedje $a_0, a_1, \dots, a_n$ je <u>unimodalno</u>, če

$\exists k \ni$: $\underbrace{a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq}_{\text{narašča}} a_k \underbrace{\geq a_{k+1} \geq a_{k+2} \geq \cdots \geq a_n}_{\text{pada}}$

$\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^{n}$ je unimodalno zaporedje.

<u>Izrek (Sperner):</u>

širina ~~boolove~~ booleove algebre (B_n) je $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Dokaz:

$(\geq)$: širina $\geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ očitno. dokazujemo, da je največja antiveriga dolga $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Dovolj je najti eno take dolžine.

ta antiveriga je $\binom{[n]}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (je antiveriga)

$(\leq)$: let A poljubna antiveriga.

koliko je maksimalnih verig v B_n?

$n!$

$\emptyset \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \cdots \subset \{1, \dots, n\}$

koliko je maksimalnih verig, ki vsebujejo dano množico $T \subseteq [n]$?

$$|T|!\cdot(n-|T|)!$$

koliko je maksimalnih verig, ki vsebujejo katero (torej natanko eno) množico iz A?

↳ nič jih ne more, ker je A antiveriga.

in velja:

$$\sum_{T\in A}|T|(n-|T|)! \leq n! \quad /:n!$$

↳ vse maksimalne verige

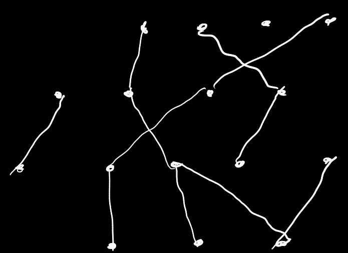
$$\sum_{T\in A}\frac{1}{\binom{n}{|T|}}\leq 1$$

$$\sum_{T\in A}\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}}=\frac{|A|}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|A|}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}\leq 1 \Rightarrow |A|\leq\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$$

definicija: pravimo, da je DUM stopničasta (angl. ranked)

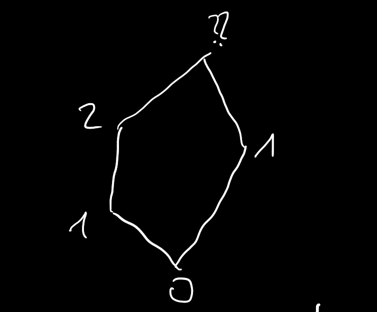


če obstaja preslikava

rang: $P\to\mathbb{N}$:

rang $x=0 \Leftrightarrow x$ je minimalen elem.

$x\lessdot y\Rightarrow$ rang $y=$ rang $x+1$



ni stopničasta

B_n : rang $T = |T|$

D_n : je stopničasta, rang za O.N.

opomba: če je v stopničasti dum P širina enaka največji velikosti $\{x \in P;\ \text{rang}\ x = k\}$,

antiveriga

elementi istega ranga niso primerljivi.

ima P spernerjevo lastnost:

Pokazali smo: B_n ima spernerjevo lastnost

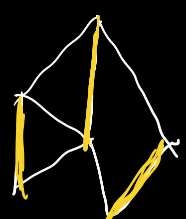
posledica: B_n lahko pokrijemo z $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ verigami.

↳ dokaz: dilworth + sperner.

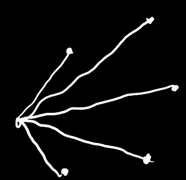
[6.3 Hallov izrek]

prirejanje M je popolno, če $\forall v \in V\ \exists e \in M \ni: v \in e$.

$$|M| = \frac{|V|}{2}$$



je popolno prirejanje



ni popolnega prirejanja

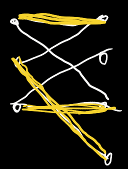
$G = X \cup Y$ dvodelen graf.

Let M prirejanje.

M je popolno prirejanje iz X v Y, če

$$\forall x \in X \ \exists e \in M \ni : x \in e$$

(torej: vsa vozlišča iz X so pokrita)



če tako popolno prirejanje iz X v Y obstaja, velja

$$\underset{\displaystyle |M|.}{\underset{\|}{|X|}} \le |Y|$$

to popolno prirejanje namreč definira injekcijo $X \to Y$.

velja celo več. za $A \subseteq X$

$$N(A) := \{ y \in Y ;\ \exists x \in A \ni : \{x,y\} \in E \}$$

$$|A| \le |N(A)|$$

Izrek (Hall):

Let G dvodelen graf. $\exists$ popolno prirejanje iz X v Y $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq X : |A| \le |N(A)|$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) : že dokazali zgoraj

(⇐): preko Dilworthovega izreka

skonstruiramo dum $P = X \cup Y$

$$x \leq x \quad \forall x \in X, y \in Y: \; x \leq x, \; y \leq y$$
$$x < y \iff xy \in E$$

(mimogrede je stopničasta).

let $\{x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_l\}$ največja antiveriga v P.

če je $A = \{x_1, \dots, x_t\}$, velja $N(A) \subseteq Y \setminus \{y_1, \dots y_l\}$

$$t = |A| \underset{\text{predpostavka}}{\leq} |N(A)| \leq |Y| - l$$

$$M = t + l \leq |Y|$$

po dilworthovem izreku lahko cel P pokrijemo z M disjunktnimi verigami.

v naši P so verige singletoni ali dva elementa.

let a število dvoelementnih verig izmed teh M.

dokažimo $a = |X|$.

gotovo je očitno $a \leq |X|$.

sedaj še $\underline{a \geq |X|}$.

velja $M = a + \underbrace{|X| - a}_{\text{singletoni v } X} + \underbrace{|Y| - a}_{\text{singletoni v } Y}$.

popolj smo dokazali $M \leq |Y|$:

$$\cancel{a} + |X| - \cancel{a} + \cancel{|Y|} - a \leq \cancel{|Y|}$$

$$|X| \leq a \quad \checkmark$$

$\Rightarrow |X| = a \Rightarrow$ Torej nam

dvoelementne verige dajejo

popolno prirejanje iz X v Y.

$\square$

opomba: dilworth $\Rightarrow$ hall. velja tudi $\Leftarrow$.

posledica: G neprazen dvodelen graf; $G = X \cup Y$.

predpostavimo sedaj:

$\forall x \in X, y \in Y$: $\deg(x) \geq \deg(y)$

št. sosedov

potem obstaja popolno prirejanje iz X v Y.

dokaz: let $A \subseteq X$ let $B := N(A)$

let $e(A,B)$ število povezav med A in B

$$e(A,B) = \sum_{x \in A} \deg(x) \leq \sum_{y \in B} \deg(y).$$

lahko imamo element iz X, povezan z nekim iz B, a ni v A.

let $d := \min_{x \in X} \deg x$

$\forall x \in X$: $\deg(x) \geq d$

$\forall y \in Y$: $\deg(y) \leq d$

$$d\cdot|A| \le e(A,B) \le d\cdot|B|$$

ker G ni prazen $\Rightarrow d > 0 \Rightarrow$ krajšanje

$$|A| \le |B|$$

posledica: G je biregularen dvodelni graf in $E_G \neq \emptyset$

vsa iz X so iste stopnje in
vsa iz $\mathcal{Y}$ so iste stopnje.

$G = X \cup \mathcal{Y}$

potem obstaja popolno prirejanje iz X v $\mathcal{Y}$
ali iz $\mathcal{Y}$ v X.

Dokaz: ker $r = \deg x \quad \forall x \in X$
$s = \deg y \quad \forall y \in \mathcal{Y}$

$|E_G| = r|X| = s|\mathcal{Y}|$

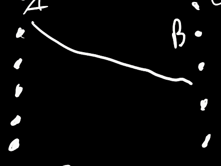
$r \ge s \Leftrightarrow |X| \le |\mathcal{Y}|$

$|X| \le |\mathcal{Y}| \Rightarrow r \ge s \Rightarrow \exists$ popolno prirejanje iz X v $\mathcal{Y}$
$|\mathcal{Y}| \le |X| \Rightarrow s \ge r \Rightarrow \exists$ pop. prirejanje iz $\mathcal{Y}$ v X

Primer: N kart

izberemo 5 kart, 4 od njih damo partnerju, ki mora ugotoviti, katera je peta.

peterica kart A : urejene četverice kart

$\binom{N}{5}$  $N^{\underline{4}}$

povezava A—$B \Leftrightarrow B \subseteq A$

Iščemo popolno prirejanje iz X v Y.

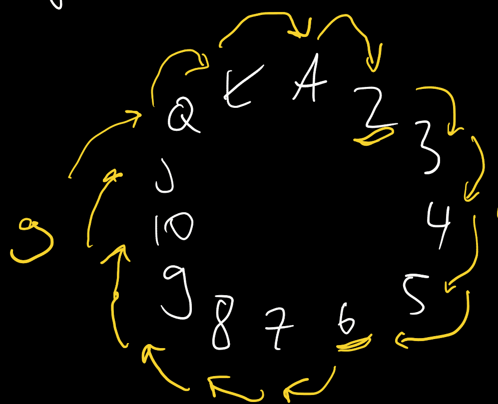
veljati mora $\binom{N}{5} \le N^4$

$$\frac{\cancel{N}(\cancel{N-1})(\cancel{N-2})(\cancel{N-3})(N-4)}{120} \le \cancel{N}(\cancel{N-1})(\cancel{N-2})(\cancel{N-3})$$

$$N \le 124$$

Primer za $N=52$ (standardne karte)

med temi 5 kartami sta dve enake barve. odstranimo tisto, ki je podrejene barve, tisto drugo damo na vrh ~~kupčka~~ štirih, ki ga podamo partnerju.



med dvema kartama je krožna razdalja največ šest.

izmed teh dveh iste barve odstranimo tisto, da je od druge do te manj ali enako 6 korakov.

2, 6 → odstranimo 6

2, 9 ⇒ odstranimo 2

ostale tri karte zakodirajo število med 1 in 6

↳ permutacije po velikosti.

Conwayev trik:

Kateri dan v tednu je zadnji dan februarja? 2025: petek

petek je tudi:

4.4. 9.5.

6.6. 5.9.

8.8. 7.11.

10.10. 11.7.

12.12.

[7. Končni avtomati]

let G usmerjen utežen graf.

$G = (V, E)$, $|V| = p$

$x \to y$ $w(xy)$ $w: E \to K$ (kolobar)

$V = \{v_1, \dots, v_p\}$

matrika sosednosti
$$A_{ij} = \begin{cases} w(v_i v_j) & ; v_i v_j \in E \\ 0 & ; v_i v_j \notin E \end{cases}$$

sprehod v grafu je pot, le da ne zahtevamo, da se vozlišča ne ponavljajo.

sprehod dolžine n $\Gamma: x_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_n$; $x_{i-1} x_i \in E$ $\forall i \in [n]$

teža sprehoda je $w(\Gamma) = w(x_0x_1)\, w(x_1x_2) \cdots w(x_{n-1}x_n)$

$$A_{ij}(n) := \sum_{\substack{\Gamma \text{ sprehod} \\ \text{dolžine } n \\ \text{od } v_i \text{ do } v_j}} w(\Gamma)$$

$1 \le i, j \le p$

$n \in \mathbb{N}$

poseben primer: če je utež enaka 1,

je $A_{ij}(n)$ št. sprehodov dolžine n med v_i in v_j.

$A_{ij}(1) = A_{ij} = w(v_iv_j)$ če sta povezana, sicer 0.

$A(n) \in \mathbb{L}^{p \times p}$ $\qquad A(1) = A$

Trditev: $A_{ij}(n) = (A^n)_{ij}$

Dokaz: indukcija: $n = 0, 1$ baza

$n = 0$: $A(0) = I = A^0$

$n = 1$: $A(1) = A^1$ ✓

korak:

$$A(n) = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(n-1)\, w(v_k v_j) \overset{\text{I.P.}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} A^{n-1}_{ik} A_{kj} = (A^{n-1} \cdot A)_{ij} =$$

$$= A^n{}_{ij}$$ ✓

$$F_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{ij}(n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n_{ij}\, x^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n x^n\right)_{ij}}_{\text{geom. vrsta}} =$$

dolžina sprehoda

$$= (I - xA)^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(I - xA)} (I - xA)^{ji}$$

Cramerjevo pravilo

brez j-te vrstice in i-tega stolpca