KOMB FMF 2024-12-16

X, $G \le S_X$, R, R^X, $G \le S_{R^X}$

točke, permut. grupa, barve, barvanja

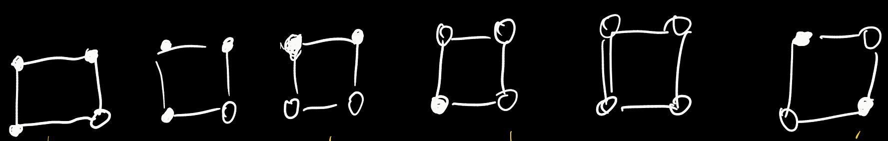
Burnsidova lema

št. neekvivalentnih barvanj

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r^{c(g)} = Z_G(r,r)$$

Želimo prešteti neekvivalentna barvanja, pri čemer zahtevamo, da je β_1 točk barve 1, β_2 točk barve 2, …

$n=4$, $r=2$ ogrlice



2 beli, 2 črni : 2

$$E = u_1^4 + u_1^3 u_2 + 2u_1^2 u_2^2 + u_1 u_2^3 + u_2^4$$

Definicija enumeratorja:

$$E = E_{X,G,R} = \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_r \\ \beta_i \ge 0 \\ \beta_1+\dots+\beta_n = n}} \left(\begin{array}{l}\text{število neekvivalentnih} \\ \text{barvanj, pri katerih je} \\ \beta_i \text{ točk barve } i\end{array}\right) u_1^{\beta_1}\cdots u_r^{\beta_r}$$

$E(1,1,1,\dots,1)$ = št. neekviv. barvanj

Izrek (posplošitev Pólyevega izreka): Brez dokaza

$$E = Z_G(u_1 + \dots + u_r,\ u_1^2 + \dots + u_r^2 + \dots,\ u_1^n + \dots + u_r^n)$$

Ideja dokaza: Burnsidova lema na

$$\{b : X \to R \ ; \ |b^{-1}(i)| = \beta_i\}$$

$$Z_{C_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}\left(t_1^4 + t_2^2 + 2t_4^1\right)$$

$$E = \frac{1}{4}\left((u_1+u_2)^4 + (u_1^2+u_2^2)^2 + 2(u_1^4+u_2^4)\right) = \dots =$$

$$= u_1^4 + u_1^3 u_2 + 2u_1^2 u_2^2 + u_1 u_2^3 + u_2^4$$

---

8 koral, 3 barve (črna, modra, bela)

Koliko je zapestnic s 4 črnimi, 3 modrimi in 1 belo koralo?

$$Z_{D_8}(t_1, \dots, t_8) = \frac{1}{16}\left(t_1^8 + t_2^4 + 2t_4^2 + 4t_8^1\right) + \frac{1}{4}t_2^4 + \frac{1}{4}t_1^2 t_2^3$$

koeficient pri $[u_1^4 u_2^3 u_3]$ od $\frac{1}{16}\Big((u_1+u_2+u_3)^8 + (u_1^2+u_2^2+u_3^2)^4$

$+ 2(u_1^4+u_2^4+u_3^4)^2 + 4(u_1^8+u_2^8+u_3^8)^1\Big) + \frac{1}{4}(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^4 +$

$+ \frac{1}{4}(u_1+u_2+u_3)^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^3$

$$\frac{1}{16}\left(\binom{8}{4,3,1}+0+0\right)+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\binom{3}{2,1,0}$$

</polyjeva teorija>

[6. Trije klasični izreki iz teorije delno urejenih množic]

6.1. Delno urejene množice.

Def.: let P množica, $\leq$ relacija.
$(P, \leq)$ je delno urejena množica (DUM) / (angl. partially ordered set – poset),

če velja
1. refleksivnost: $x \leq x \quad \forall x \in P$
2. antisimetričnost $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in P$
3. tranzitivnost: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \forall x, y, z \in P$

Primeri: $([n], \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \underset{\text{deli}}{\mid})$, $(\underset{\text{delitelji } n}{D_n}, \mid)$,
$(2^{[n]}, \subseteq)$

oznaka
$\mathbf{n} = \underline{n} = ([n], \leq)$

Boolova algebra:
$B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$

---

definicije
oznak

$x < y \;:\Leftrightarrow\; x \leq y,\ x \neq y$
$x \geq y \;:\Leftrightarrow\; y \leq x$

$x <\cdot y \;:\Leftrightarrow\; x<y \wedge \nexists z: x<z<y$

zdb y pokriva x
y je naslednik x
x je predhodnik y

v $\underline{n}$: $i <\cdot i+1$

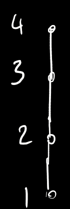
v D_n: $a <\cdot b \Leftrightarrow \frac{b}{a}$ je praštevilo

v B_n: $T <\cdot T \cup \{i\},\ i \notin T$

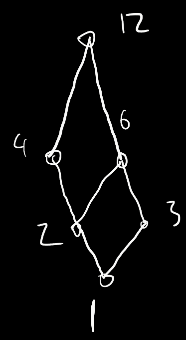
Hassejev diagram je graf z vozlišči elementi P in povezavami med x, y ⇔ $x <\cdot y$ ali $y <\cdot x$

$x \leq y$ y „nad" x

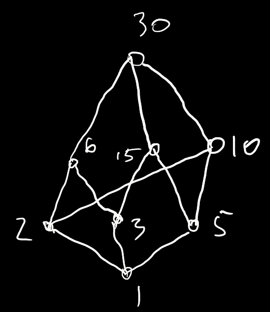
$\underline{4}$



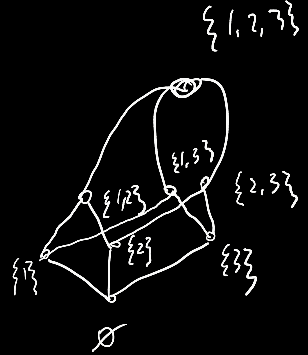
D_{12}:

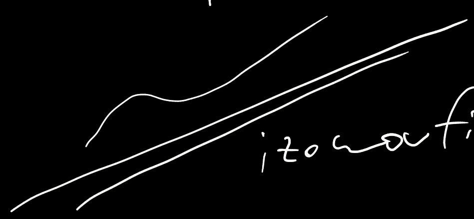


D_{30}



B_3:





izomorfizem

maksimalen element dum P je $x \in P$, za katerega $\nexists y \in P$: $x < y$.

minimalen el. dum P je $x \in P$ z: $\nexists y \in P$: $y < x$.

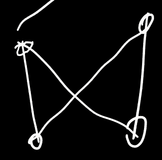
največji element dum P je $x \in P$ ∋:

$\forall y \in P: y \leq x$ (je lahko le en)

najmanjši element dum P je $x \in P$ ∋:

$\forall y \in P: x \leq y$

dva max el., ki nista največja.



x največji $\Rightarrow$ x maksimalen

$y \leq x < y$ ↯ z antisimetričnostjo

končna neprazna dum vsebuje max element.

let $x_1 \in P$.

case maksimalen:

✓

case ni maksimalen:

$\exists x_2 \in P, \ldots$

sčasoma je, če ni maksimalnega, v P neskončno elementov ↯.

$(\mathbb{N}, \leq)$ nima max el.

Def.: x in y sta primerljiva, če $x \leq y$ in $y \leq x$, sicer sta neprimerljiva!

A je antiveriga, če sta vsaka $x, y \in A$, $x \neq y$, neprimerljiva.

Antiverige v $\underline{n}$: $|A| \leq 1$

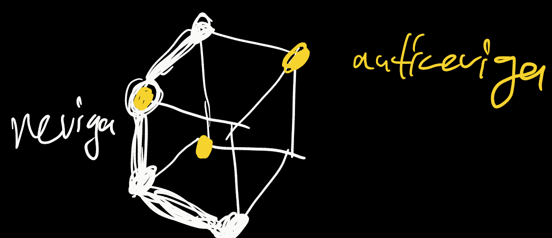
v B_n:
- $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$
  oz. vse podmnožice velikosti k
- $\{\{1,2\}, \{2,3,4,5\}, \{1,5,7\}\}$
- ...

veriga: $C \subseteq P$ je veriga, če sta vsaka $x, y \in C$ primerljiva.

Vse podmnožice v $\underline{n}$ so verige.

$\{1, 2, 12\}$ je veriga D_{12}.

$\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ je veriga v B_3



širina P: velikost največje antiverige v P

višina P: velikost največje verige v P

	širina	višina
$\underline{n}$	1	n
B_3	3	4
B_n	$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$	$n+1$

Množica maksimalnih elementov je antiveriga.

[6.2 Dilworthov izrek]

Izrek (Mirsky): Let P končna dum

let m = minimalno št. antiverig, s katerimi lahko pokrijemo P

M = velikost največje verige v P (višina)

Tedaj $m = M$.

Dokaz

C veriga in P pokrita z antiverigami $A_1, \ldots, A_l$,

očitno gotovo velja, da sta poljubna dva el. v C elementa različnih ~~antiverig~~.

$\Rightarrow |C| \leq l \Longrightarrow M \leq m$

$m \leq M$ indukcija po moči dum P

$|P| = 1 \qquad m = M = 1$

korak: $|P| > 1$. predpostavimo, da $m \leq M$ za manjše dum.

$A = \{\text{max elementi v } P\}$ je neprazna antiveriga.

$P \setminus A$ je manjša dum z višino $M-1$.

(najdaljša veriga v P vsebuje natanko en maksimalen element)

po I.P. lahko $P \setminus A$ pokrijemo z $M-1$ antiverigami $\Rightarrow P$ lahko pokrijemo z M antiverigami. $\Rightarrow m \leq M$.

opomba: Dokaz nam daje tudi algoritem, kako najti pokritje z najmanj antiverigami

$A_1 = \{\text{max. elem. v } P\}$

$A_2 = \{\text{max. elem. v } P \setminus A_1\}$

$A_3 = \{ \text{-||- v } P \setminus (A_1 \cup A_2)\}$

<u>Izrek (Dilworth)</u>: let P končna dum.

let m = min. št. verig, s katerimi lahko pokrijemo P.

M = velikost največje antiverige (širina dum P)

velja $m = M$.

<u>Dokaz</u>: let A antiveriga

pokritje z verigami $C_1, \dots, C_l$

poljubna dva elementa iz antiverige sta pokrita z različnima verigama $\Rightarrow |A| \leq l \Rightarrow M \leq m$

<u>$m \leq M$</u> z indukcijo na $|P|$

baza $|P| = 1$ $m = M = 1$ ✓

korak: predpostavimo, da je $|P| > 1$, za vse manjše dum velja I.P.

vzemimo C poljubno najdaljšo verigo v P

$P \setminus C$ je manjša dum.

širina se lahko zmanjša za 1 ali pa ostane ista.

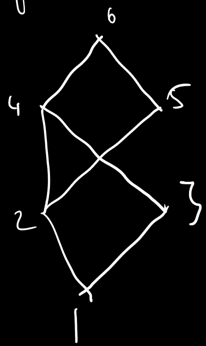
case širina $P\setminus C$ se zmanjša na $M-1$

$P\setminus C$ po I.P. pokrijemo z $M-1$ verigami.

P lahko pokrijemo z M verigami $\square$.

Primer:

P:



širina $P = 2$

$C=\{1,2,5,6\}$

$P\setminus C$ širina se zmanjša na 1

$C=\{1,2,4,6\}$

$P\setminus C$ širina ostane 2

za $C=\{1,2,4,6\}$:

$A=\{3,5\}$

$P^+=\{3,4,5,6\}$

$P^-=\{1,2,3,5\}$

case širina $P\setminus C$ ostane M:

let $A=\{a_1,\dots,a_{\boxed{M}}\}$ antiveriga v $P\setminus C$. (največja)

let $P^+ = \{x\in P;\ \exists i \ni: x \geq a_i\}$

$P^- := \{x\in P;\ \exists i \ni: x \leq a_i\}$

$P^+\cup P^- = P$

če $\exists p\in P \ni: p\notin P^+ \wedge p\notin P^-$, je p neprimerljiv z vsemi elementi $A \Rightarrow A\cup\{p\}$ je antiveriga velikosti $M+1$ v P $*$

$P^+\cap P^- = A$

ker sta a_i, a_j v antiverigi

$(\subseteq)$ $a_i \leq x$, $x\leq a_j \Rightarrow a_i\leq a_j \Rightarrow i=j \Rightarrow x=a_i$

$(\supseteq)$ $a_i \geq a_i \Rightarrow a_i\in P^+$

$a_i\leq a_i \Rightarrow a_i \in P^-$

$P^+ \neq P$

najmanjši element C ni v P^+.

$x_0 > a_i$ (ne more biti $x_0 = a_i$, ker $A\subseteq P\setminus C$)

$\Rightarrow C\cup\{a_i\}$ je daljša veriga $*$

$P^- \neq P$

vsaj en el. c ni v P^- ... podobno

za P^+ in P^- uporabimo I.P. Njuna širina je $M \Rightarrow$ lahko ju pokrijemo z M verigami.

P^+ z verigami $C_1^+, \dots, C_M^+$.

P^- z verigami $C_1^-, \dots, C_M^-$.

BŠS. $a_i \in C_i^+$ in $a_i \in C_i^-$

npr. primer:

$C_1^+ = \{3, 4, 6\}$, $C_2^+ = \{5, 6\}$

$C_1^- = \{1, 3\}$, $C_2^- = \{2, 5\}$

$C_i = \underbrace{C_i^+}_{\geq a_i} \cup \underbrace{C_i^-}_{\leq a_i}$ je veriga

in $C_1 \cup \dots \cup C_M = P$

npr. primer

$C_1 = \{1, 3, 4, 6\}$

$C_2 = \{2, 5, 6\}$

Primer:

$P = ([2n], \mid)$ $\quad A = \{n+1, \dots, 2n\}$ je antiveriga velikosti n.

$$C_i = \{(2i-1)\cdot 2^j;\ j \geq 0\} \cap [2n]$$

$$C_1 \cup \dots \cup C_n = [2n]$$

$\Rightarrow$ širina $= n$

Opomba: v Dilworthovem izreku bi lahko predpostavili, da so verige, s katerimi pokrivamo, disjunktne.

$C_1, \dots, C_n$ je pokritje z verigami.

$$C_1,\ C_2 \setminus C_1,\ C_3 \setminus \{C_1 \cup C_2\},\ \dots,\ C_n \setminus \{C_1, \dots, C_{n-1}\}$$

je spet pokritje, tokrat z disjunkt. verigami.