KOMB P FMF 2024-12-09

let $G, X, \quad G \leq S_X$

$G\cdot x = \{ g\cdot x \,;\, \forall g \in G \}$

$G_x = \{ g \in G \,;\, g\cdot x = x \} \leq G$ stabilizator

$X/G = \{ G\cdot x : x \in X \}$

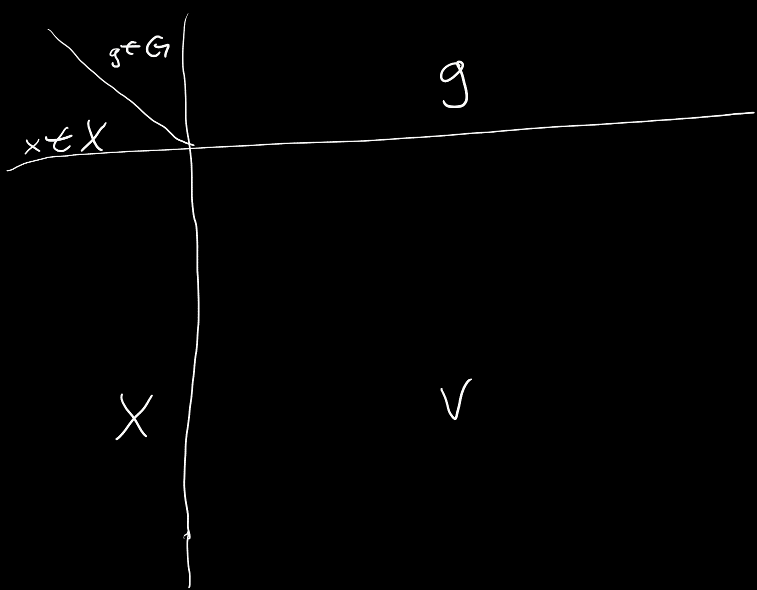
$X^g = \{ x \in X \,;\, g\cdot x = x \}$

dokazali smo $|G| = |G\cdot x| \cdot |G_x| \quad \forall x \in X$

Burnsidova lema: število orbit delovanja je enako povprečnemu številu negibnih točk. ZDB

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Dokaz:

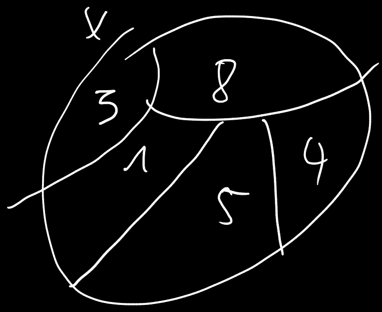


$\checkmark \iff x \in X^g \iff$
$gx = x \iff$
x je negibna točka

po stolpcih po vrsticah

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} \underbrace{|G_x|}_{\text{moč stabilizatorja}} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G\cdot x|} = (\ldots)$$

dokazati je treba še $\displaystyle \underline{\sum_{x \in X} \frac{1}{|G\cdot x|} = |X/G|}$



relacija $\sim$ za $x, y \in X$:

$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: gx = y$

ekvivalenčna

$$\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\right)+1+\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}\right)+\dots = \text{št. ekv. razredov}$$

$$(\dots) = |G| \sum_{\sigma \in X/G} \sum_{x \in \sigma} \frac{1}{|\sigma|} = |G| \cdot |X/G|$$

Primeri: (1) $G = D_n$ $X = [n]$

$$|X^g| = \begin{cases} n; & g = id \\ 0; & g \neq id,\ g \text{ rotacija} \\ 1; & n \text{ lih},\ g \text{ zrcaljenje} \\ 0; & n \text{ sod};\ g \text{ zrcaljenje tipa I} \\ 2; & n \text{ sod},\ g \text{ zrcaljenje tipa II} \end{cases}$$

povprečno število negibnih točk = št. orbit =

$$= \frac{1}{2n}\left(1 \cdot n + (n-1)\cdot 0 + n \cdot 1\right) = 1 =$$

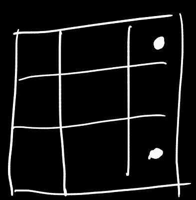
n lih

n sod

$$= \frac{1}{2n}\left(1 \cdot n + (n-1)\cdot 0 + \tfrac{n}{2}\cdot 0 + \tfrac{n}{2}\cdot 2\right) = 1$$

N: naključno 2 kamenčka na mreži 3x3, na tem papirju

delujemo D_4 (rot. + zrc.)



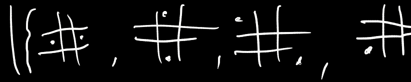
elementi so izbire dveh točk

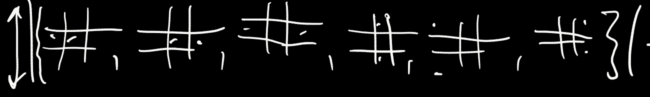
$$|X| = \binom{9}{2} = 36$$

id ima 36 negibnih točk (vse)

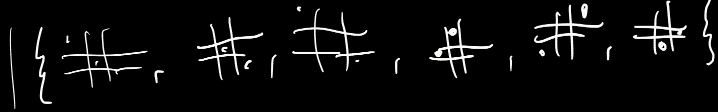
90° koliko je izbir dveh kamenčkov, da po rotaciji ostane isto stanje?

nič (0).

180° ↺ $|\{$  $\}| = 4$

zrcaljenja: ↕ $|\{$  $\}| = 6$

↔ 6 isto

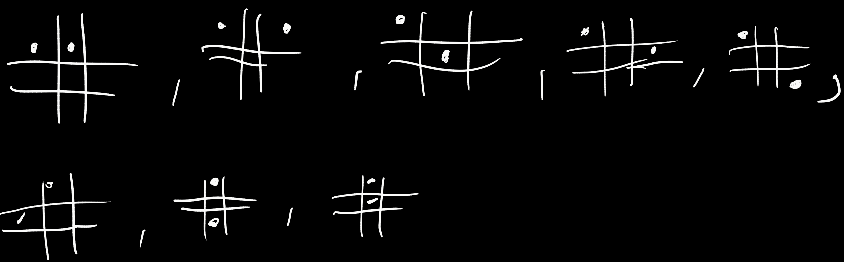
↗↙ $|\{$  $\}| = 6$

↖↘ 6 isto

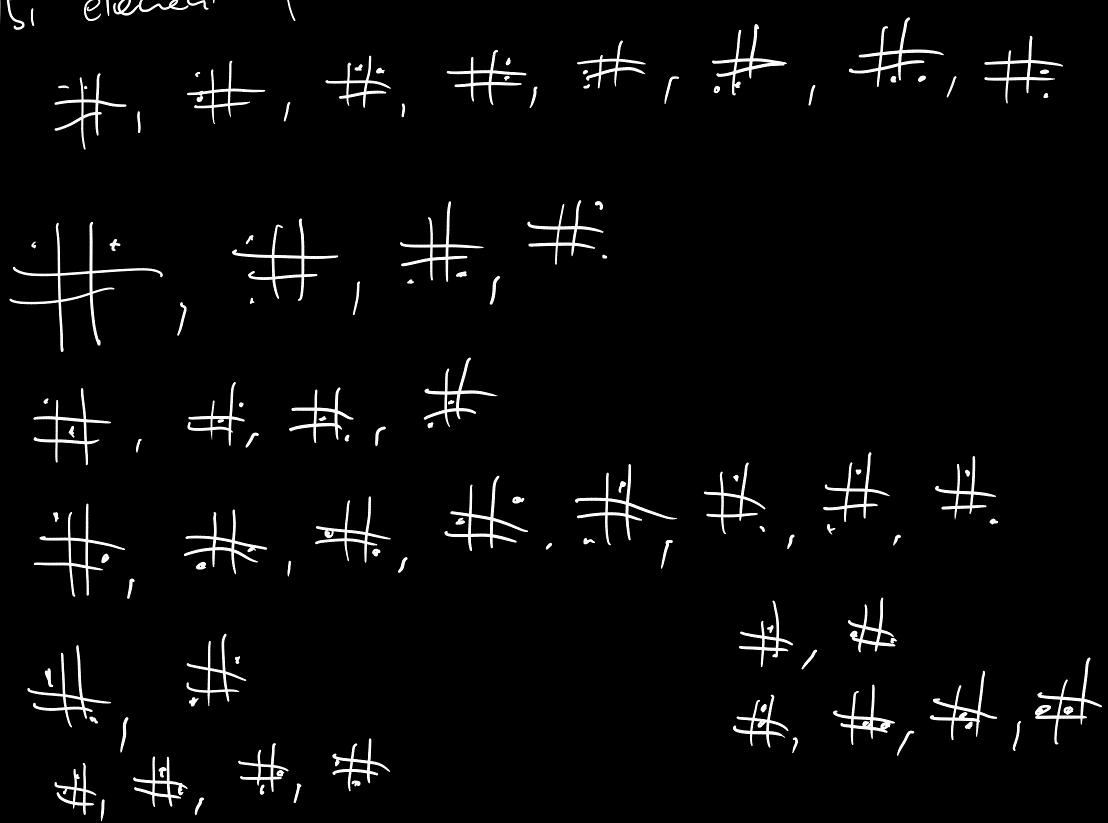
povp. št. neg. točk: $\frac{1}{8}\left(1\cdot 36 + 2\cdot 0 + 1\cdot 4 + 2\cdot 6 + 2\cdot 6\right) = 8$

↳ št. elementov diedrske grupe D_4

št. orbit: (predstavniki orbit)



vsi elementi po orbitah:



$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$$ velikost orbite vedno deli moč grupe

[5.3. Ciklični indeks in Pólyev izrek]

$$Z_G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{c \text{ cikel } g} t_{|c|}$$

$|c|$ … dolžina cikla

polinom v spremenljivkah $t_1, \dots, t_n$

$G = D_4$ deluje na $\{1,2,3,4\} = [4]$

$$Z_{D_4}(t_1,t_2,t_3,t_4) = \frac{1}{8}\Big(\underbrace{t_1^4}_{\text{identiteta}} + 2 \cdot t_4^1 + t_2^2 + t_2^2 +$$

identiteta: ima 4 cikle dolžine 1

rotacija $\pm 90°$: en cikel dolžine 4

rotacija $180°$: dva cikla dolžine 2

zrcaljenji $\leftrightarrow \updownarrow$: dva cikla dolžine 2

$$+ 2 t_2 t_1^2 \Big)$$

zrcaljenji $\swarrow\!\nearrow \; \nwarrow\!\searrow$: dva cikla dolžine 1 in en cikel dolžine 2

ciklični indeks nam da „povprečno ciklično strukturo elementov"

Grupa simetrij pravilnega tetraedra deluje na oglišči

$$Z_G(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{12}\Big(\underbrace{t_1^4}_{id} + \underbrace{8 \cdot t_1 t_3}_{\text{izb. oglišče}, \pm 120°} + \underbrace{3 \cdot t_2^2}_{\text{izb. 2 strani}, 180°} \Big)$$

12 → št. elem. grupe

ista grupa deluje na robovih

$$Z_G(t_1, \dots, t_6) = \frac{1}{12}\left(t_1^6 + 8 t_3^2 + 3 \cdot t_1^2 t_2^2 \right)$$

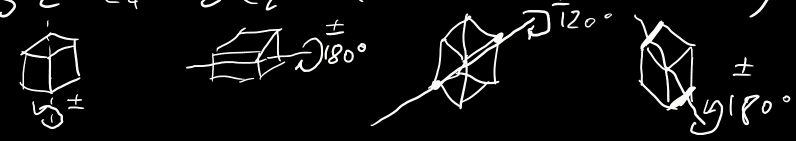
in na ploskvah

$$Z_G(t_1, \dots, t_4) = \frac{1}{12}\left(t_1^4 + 8 t_1 t_3 + 3 \cdot t_2^2 \right)$$

grupa simetrij točke na ogliščih:

$$Z_G(t_1,\dots,t_8)=\frac{1}{24}\left(t_1^8+3\cdot 2\cdot t_4^2+3t_2^4+4\cdot 2\, t_3^2 t_1^2+6t_2^4\right)$$

id



Izrek:

$$Z_{C_n}(t_1,\dots,t_n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)\, t_d^{n/d}$$

↓

ciklična grupa deluje na ogliščih pravilnega n-kotnika

Dokaz: $C_n=\{(1,2,\dots,n)^i \;;\; 1\le i\le n\}$

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2=(1\,3\,5)(2\,4\,6)$$
$$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^3=(1\,4)(2\,5)(3\,6)$$
$$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^5=(1\,6\,5\,4\,3\,2)$$

$$(1\,2\dots n)^d=(1,\,d+1,\,2d+1,\dots)$$
$$(2,\,d+2,\,2d+2,\dots)$$
$$(3,\,d+3,\,2d+3,\dots)$$
$$(d,\,2d,\,3d,\dots,kd=n)$$

za $d|n$

d ciklov dolžine n/d

$(1\,2\dots n)^i$ = en cikel dolžine n

$D(i,n)=1$

i tuje n

$$(1\,2\dots n)^i=\Big(\overbrace{(1\,2\,\dots\,n)^d}^{d \text{ ciklov dolžine } \frac{n}{d}=n'}\Big)^{i'} = \text{produkt } d \text{ ciklov dolžine } n', \text{ ker } D(n',i')=1$$

$i=di'$ $\quad n=dn'$

$d=D(i,n)$ $\quad D(n',i')=1$

Doprinos k cikličnemu indeksu: $\quad t_{\frac{n}{d}}^{d}$

Kolikokrat se pojavi $t_{n/d}^{d}$? Koliko je i-jev, $1 \le i \le n$, $D(i,d)=d$?

$$i = i' \cdot d \qquad 1 \le i' \le \frac{n}{d} \qquad D\left(i', \frac{n}{d}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ eulerjeva $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$.

$$Z_{C_n}(t_1, \dots t_n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) t_{n/d}^{d} =$$

$$d' := \frac{n}{d}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d' \mid n} \phi(d)\, t_d^{n/d}$$

opomba: $\phi(n) = |\{i \in [n];\ D(i,n) = 1\}| = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$$Z_{C_4}(t_1, \dots, t_4) = \frac{1}{4}\left(\underset{\phi(1)}{1}\, t_1^4 + \underset{\phi(2)}{1}\, t_2^2 + \underset{\phi(4)}{2}\, t_4^1\right)$$

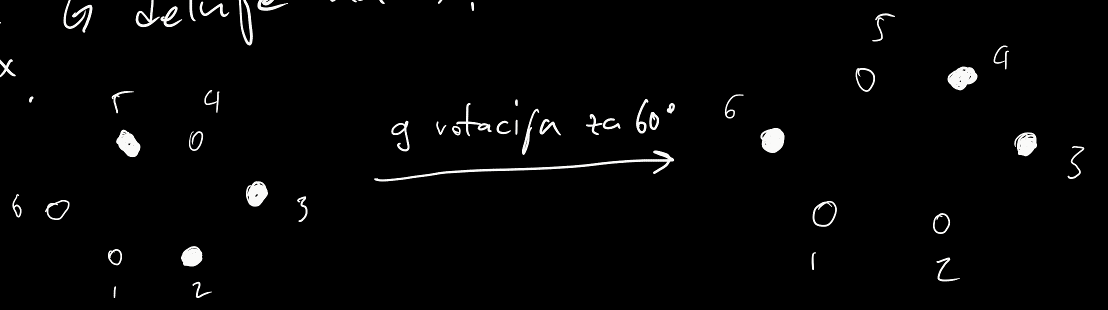
$$Z_{C_6}(t_1, \dots, t_6) = \frac{1}{6}\left(1 \cdot t_1^6 + 1\, t_2^3 + 2 t_3^2 + 2 t_6^1\right)$$

$$Z_{D_n}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d \mid n} \phi(d)\, t_d^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2} t_1^1 t_2^{\frac{n-1}{2}} & ; n \text{ lih} \\ \frac{1}{4} t_2^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4} t_1^2 t_2^{\frac{n-2}{2}} & ; n \text{ sod} \end{cases}$$

X končne R množica barv, $|R| = r$

barvanje je f-ja $b: X \to R$; R^X množica barvanj

če G deluje na X, dobimo tudi delovanje na R^X.



$$\hat{g}\cdot b(x) = b(g^{-1}\cdot x)$$

če je $r>1$, dobimo delovanje „iste" grupe G na R^X. (detajli na zoomB2)

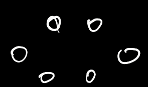
Uporabimo Burnsidovo lemo na tem delovanju na barvanjih.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

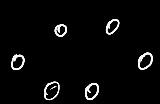
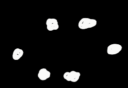
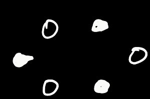
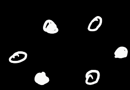
$$|R^X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\underbrace{|(R^X)^g|}_{\text{število negibnih barvanj za } g}$$

število neekvivalentnih barvanj

D_6, $r=2$, g rotacija za $60°$: 2 negibni barvanji:

 in 

— ‖ — $120°$: 4 negibna barvanja:

— ‖ — $180°$: 8 negibnih barvanj.

št. negibnih barvanj: $|\{\hat{g}\cdot b = b\}|$

$$\hat{g}\, b(x) = b(g^{-1}x) = b(x) \quad \forall x\in X$$

$\Leftrightarrow$ x in $g^{-1}x$ sta iste barve

$\Leftrightarrow$ x in gx sta iste barve

$\Leftrightarrow$ $x, gx, g^2x, g^3x, \dots$ so vsi iste barve.

$\Leftrightarrow$ vsi elementi v ciklu permutacije $g \in S_X$ so iste barve.

za vsak cikel barvo izberemo neodvisno $\Rightarrow$ izbir je $r^{c(g)}$

št. ciklov g

<u>Pólyev izrek:</u>

Let $G \leq S_X$. Število neekvivalentnih barvanj X z r barvami

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{c(g)} = Z_G(r, r, r, \dots, r)$$

<u>Primer:</u> št. ogrlic na n kroglicah z r barvami je $Z_{C_n}(r, \dots, r) =$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \phi(d) r^{n/d}$$

$n = 4,\ r = 2$: $\frac{1}{4}(2^4 + 2^2 + 2 \cdot 2) = 6$

$n = 6,\ r = 3$: $\frac{1}{6}(3^6 + 3^{3 = \frac{6}{2}} + 2 \cdot 3^{2 = 6/3} + 2 \cdot 3^{1 = \frac{6}{6}}) =$

št. zapestnic na n kroglicah z r barvami je $Z_{D_n}(r, \dots, r) =$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{d \mid n} \phi(d) r^{n/d} + \begin{cases} \frac{1}{2} r^{\frac{n+1}{2}} ; & n \text{ lih} \\ \frac{1}{4}\left(r^{\frac{n}{2}} + r^{\frac{n}{2}+1}\right) ; & n \text{ sod} \end{cases}$$

$n = 4,\ r = 2$: $\frac{1}{8}(2^4 + 2^2 + 2 \cdot 2) + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} 2^3 = 6$

TO RAD VPRAŠA NA USTNIH...

$G = S_n$

$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} r^{c(g)} = \frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{n} c(n,t)\, r^t$$

št. neekvivalentnih barvanj je ?

če sta barvanji ekvivalentni $\Rightarrow$ za vsako barvo i imata enako število kroglic za barvo i.

b_1, b_2

$$\forall i\in[r]: |b_1^{-1}(i)| = |b_2^{-1}(i)|$$

V primeru $G = S_X$ velja celo ekvivalenca.

Če je x_i št. kroglic barve i, mora veljati:

$x_i \geq 0$ in $\sum_i x_i = n$

$\Rightarrow$ šibke kompozicije n z r členi.

$$\binom{n+r-1}{n} = \frac{(n+r-1)^{\underline{n}}}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_t c(n,t)\, r^t$$

$(n+r-1)(n+r-2)\cdots(r) = r^{\overline{n}}$

dokazali smo $\sum_t c(n,t)\, r^t = r^{\overline{t}}$.