

[4.6 Uporaba rodovnih funkcij]

zakaj so rodovne fje tako uporabne?

1. Rodovna fja je "pogosto" "lepa", tudi če za zaporedje "ni" "lepe" formule:

$$\sum_t c(n,t) x^t = x^n$$

$$\sum_n S(n,t) x^n = \frac{x^t}{(1-x)(1-2x)\dots(1-tx)}$$

$$\sum_n S(n,t) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{t!} (e^x - 1)^t$$

1et in ... št. involucij v S_n (da je sama sebi inverz: $\pi^2 = id$ ozi. $\pi^{-1} = \pi$)

$$\sum_n i_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

2. Rodovna fja daje vse ostale učiine podajanja zaporedja.

$$\sum_n F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2} \quad \text{preko parcialnih ulomkov dobimo
explicitno formulo.}$$

$$/ : (1-x-x^2)$$

$$(1-x-x^2) \sum_n F_n x^n = 1$$

$$[x^n]: F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$$

$$\sum_n p_k(n) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)} = \left(\sum_n p_{k-1}(n) x^n \right) \cdot \frac{x}{1-x^k}$$

$$(1-x^k) \sum_n p_k(n) x^n = x \sum_n p_{k-1}(n) x^n$$

$$[x^n]: p_k(n) - p_k(n-k) = p_{k-1}(n-1)$$

asimptotika: singularnost rodovne fje, ti je
↓
točke nedefiniranosti

našliš fje izhoditca, določa asimptotičo
zaporedje.

za $\frac{1}{1-x-x^2}$ so singularnosti učiile invarianca,

$$\text{logitue } 1-x-x^2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n \sim A \frac{1}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} = A \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\text{asimptotika}}$$

3. Podoben fga sedaj pogosto dobiti neposredno iz kombinatoričnega opisa zaporedja.

a_n ... št. kompozicij n s členi 1 ali 2

$$a_n = F_n \quad (\text{fibonacci})$$

NTSBANCIOT BIPA

$$\sum_n a_n x^n = \frac{1}{1 - (x^1 + x^2)}$$

sestavljeno iz

b_n ... št. kompoz. s členi 1 in 3

$$\sum_n b_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^3}$$

$$\sum_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

↑
sestavljeno iz

involucija je permutacija, ki ima cikle dolžin 1 in 2

a_n ... št. perm. v S_n , $\pi^3 = \text{id}$

$$\sum_n a_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^3}{3}}$$

b_n ... št. perm. v S_n , $\pi^6 = \text{id}$

$$\sum_n b_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6}}$$

(4) Iz podobne fga lahko izračunamo povprečje (variance ...)

koliko elementov imajo v povprečju podmnožice $[n]$?

$$\frac{1}{2^n} \sum_{A \subseteq [n]} |A| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$$

$$F(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

$$F'(x) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$F'(1) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

$$\text{povp.} = \frac{1}{2^n} \cdot n 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{2}$$

kolikšno je povprečno število cikel permutacije v S_n ?

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{cyc}(\pi) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k \cdot c(n, k)$$

$$\sum_k c(n, k) x^k = x^n \xrightarrow{\text{odvod}} \sum_k c(n, k) \cdot k \cdot x^{k-1} = (x(x+1) \cdots (x+n-1))' = *$$

$$* = X^n \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n-1} \right)$$

za $x > 1$: $\hookrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = H_n$
into harm. št.

$$\sum_k t c(n, t) = n! \cdot H_n$$

proprano št. citev $= H_n \sim \log n$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

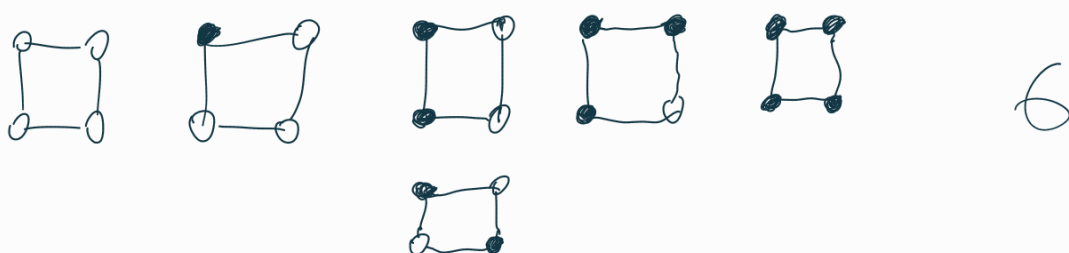
$$(fgh)' = (fg)'h + fgh' =$$

$$= f'gh + fg'h + fgh' =$$

[5. POLYVA TEORIJA] Polya [pója]

Koliko ogulic s štirimi kotaldami in dvema barvama?

invariantno za rotacijo.



Koliko pa je zapetih? invariantna za zrcaljenje in rotiranje

zopet 6

n = št. kotald

t = št. barv

različni ogulici, a isti zapetici $n=6, t=2$



$n=3, r=3$



[5.1. permutacijske grupe]

X množica kotald, $|X| = n \in \mathbb{N}$

G množica permutacij elementov X

$G \subseteq S_X$ podgrupa

rečemo $G \leq S_X$

$\hookrightarrow$ permutacijska grupa

$$X = [n] \quad S_X \rightarrow S_n$$

$$C_n = \{ (1 \ 2 \ \dots \ n)^i : 0 \leq i \leq n-1 \}$$

cikel

izomorfna

ciklična grupa

$$|C_n| = n$$

$$(\mathbb{Z}_n, +)$$

$$\Phi: \mathbb{Z}_n \rightarrow C_n \quad ; \quad \Phi(i) = (1 \ 2 \ \dots \ n)^i$$

inj

$$\text{in } \Phi(i+j) = \Phi(i) \cdot \Phi(j) \quad \checkmark \quad \Rightarrow \Phi \text{ je inj}$$

$$\text{in } \Phi \text{ bijektivna } \quad \checkmark$$

C_n = grupa rotacij pravilnega n -kotnika.

D_n = dihedrska grupa: grupa vseh linearnih pravilnega n -kotnika: rotacij + zrcaljenja

$$|D_n| = 2n$$

n lih



toliko, kolikor je oglišč: n

n sod



tip I

tip II

toliko, kolikor je pol vogelov + pol stranic =

$$\frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n = n$$

$$2n$$

+

$$D_4 = \{ id, (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (14)(23), (13), (24) \}$$

$$S_n \text{ pervm. grupa} \quad G = \{ id, zrcaljenje \} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$G \leq S_X \quad \text{elementi } G \text{ delujejo na } X.$$

$$g \in G, \quad x \in X$$

$$g \cdot x \in X \quad (g \cdot x = g(x))$$

Definirajmo: $x \sim y \quad (x, y \in X) \iff \exists g \in G \text{ sta ekvivalentna}$

$$\Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y$$

tudi no, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

refleksivnost $x \sim x$ ($\text{id} \cdot x = x$)

simetričnost $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
 $y = gx \Rightarrow x = g^{-1}y$

transitivnost $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$
 $y = gx$ $z = hy$ $z = hgx$

Ekvivalenčne razrede za $\sim$ imenujemo ORBITE.

$x \in X$
 $G \cdot x = Gx = \{g \cdot x ; g \in G\} \subseteq X$
 orbita elementa x .

$X/G = \{Gx ; x \in X\}$ množica orbit

$G_x = \{g \in G : gx = x\}$ fiksirajo
 $x \in X$ ↑
 elementi, ki stabilizirajo x

In velja $G_x \leq G$ ~ stabilizator

$\text{id} \in G_x$ ✓

$g, h \in G_x \Rightarrow g \cdot h \in G_x$ ✓

$g \in G_x \Rightarrow g^{-1} \in G_x$ ✓

$gx = x \quad | \cdot g^{-1}$

$x = g^{-1}x$

$X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ vs elementi x , ki jih g stabilizira (negibne točke g)

Primer:

(1) $G = C_n$

$Gx = X$ $|X/G| = 1$

$G_x = \{\text{id}\}$ $X^g = \begin{cases} X & ; g = \text{id} \\ \emptyset & ; g \neq \text{id} \end{cases}$

(2) $G = D_n$ $G \cdot x = X$ $|X/G| = 1$

$G_x = \{\text{id}, \text{ena zrcaljenje}\}$

$|X^g| = \begin{cases} |X| & ; g = \text{id} \\ 0 & ; g \neq \text{id}, g \text{ rotacija} \\ 1 & ; g \text{ zrcaljenje, u lih} \\ 0 & ; g \text{ zrcaljenje tipa I, u sod} \\ 2 & ; g \text{ zrcaljenje tipa II, u sod} \end{cases}$

$$(3). \quad G = S_n \quad G \cdot x = X \quad |x / G_x| = 1$$

$$|G_x| = (n-1)! \quad |X^G| = \text{st. vezib. tč. permut. } \mathbb{Z}$$

[5.2 Burnsideova lema]

$$\text{Trditve: } x \neq X \text{ poljubni } |G| = |Gx| \cdot |G_x|$$

$$\text{za } G = C_n: \quad n = n \cdot 1$$

$$G = D_n: \quad 2n = n \cdot 2$$

$$G = S_n: \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

Dokaz: let G poljubna grupa in $H \leq G$ poljubna.

$$g \cdot H = \{g \cdot h : h \in H\} \text{ levi odsek } H$$

odseki so disjunktni, neprazni, enakovredni:

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} H \rightarrow gH \text{ bijektiv} \\ h \mapsto gh \end{array} \right)$$

$$G/H = \{gH : g \in G\} \text{ kvocientna množica}$$

$H \triangleleft G$ - H podgrupa edinta G grupa
 le, kadar H podgrupa
 edinta (angl. normal subgroup)

$$\forall h \in H, g \in H: ghg^{-1} \in H$$

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = [G:H]$$

indeks podgrupe

$$\text{Glede bijektiv } \varphi: G_x \rightarrow G/G_x$$

$$g_x \mapsto gG_x$$

dobro definirano: $g'_x = g_x \Rightarrow gG_x = g'G_x$

$$g'_x = g_x$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}g'_x = x$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}g' \in G_x$$

$$\Rightarrow g^{-1}g'G_x = G_x$$

$$\Rightarrow g'G_x = gG_x$$

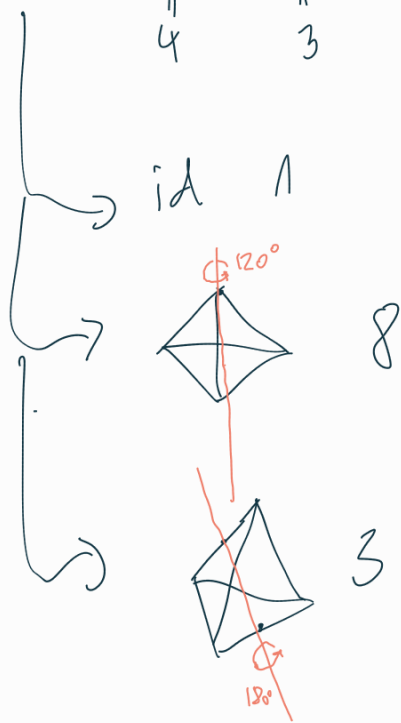
↳ surjectivest: $g \cdot G_x = \varphi(gx)$

Primer: $G =$ symmetrie pravidelného tetraedru

$$|G| = |G_x| \cdot |G_x|$$

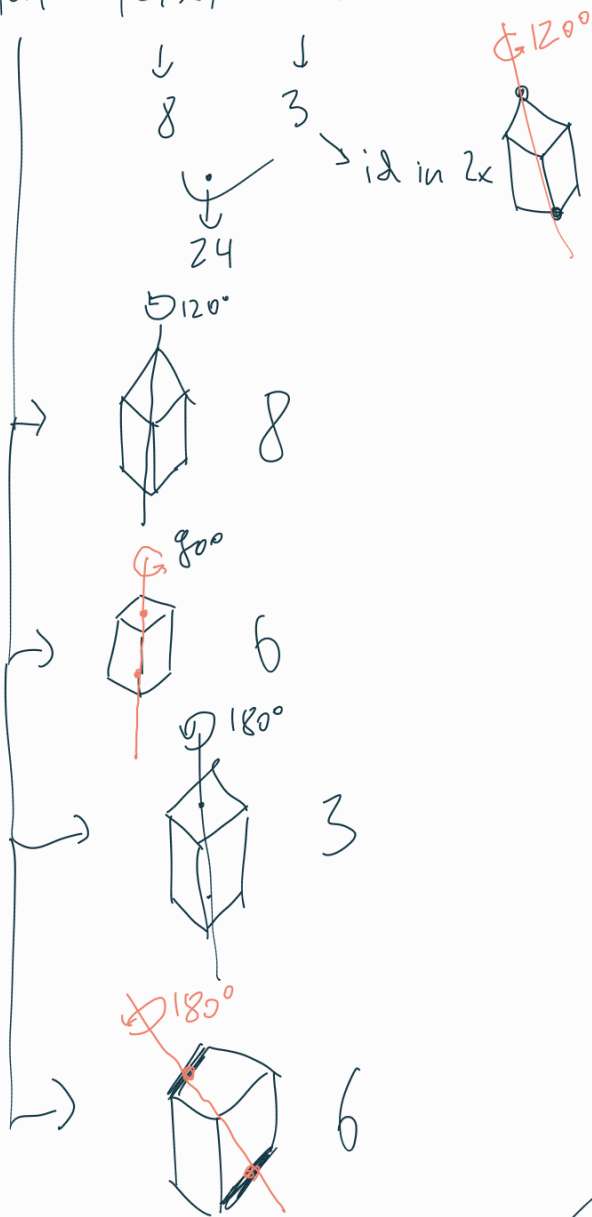
$$\begin{matrix} \parallel \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ 3 \end{matrix}$$

$$12 = 12$$



$G =$ symmetrie kocke

$$|G| = |G_x| \cdot |G_x|$$



$$= 24 \quad \checkmark$$

in verità $G \cong S_4$