KOMBPFMF2024-11-11

Zaporedje je preslikava $\mathbb{N} \to K$, kjer je K polje s karakteristiko 0.

npr. $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Kdaj rečemo, da poznamo zaporedje?

- eksplicitna formula: $a_n = 2^n$; $b_n = n!$
- rekurzivna formula: $a_n = 2a_{n-1}$ $a_0 = 1$

  $b_n = n\, b_{n-1}$ $b_0 = 1$

  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; $F_0 = F_1 = 1$ fibbonaccijevo
- asimptotska formula

  $a_n \sim b_n$, kjer je b_n znano preprosto zaporedje

  asimptotsko enako: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

  STIRLINGOVA FORMULA

  $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- RODOVNA FUNKCIJA

  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ... potenčna vrsta

  rodovna f-ja zaporedja

  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$ geometrijska vrsta za $x \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (vadij)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{q-1}}$$

Iz analize vemo, da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $|x| < R$, kjer R imenujemo konvergenčni polmer.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$$

$$\| \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ če limita obstaja.}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$; $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n|}} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(= e^x)$; $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$; $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$

ročno preverimo za $x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1$ za $x=0$.

konvergira samo za $x=0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 x^n$: definirani le v $x=0$, tam sta enaki.

V kombinatoriki namesto običajnih potenčnih vrst študiramo formalne potenčne vrste.

[4.2 FORMALNE POTENČNE VRSTE]

K je polje, $\operatorname{char} K = 0$.

$K[x]$ je množica polinomov s koeficienti v K.

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n ; n \in \mathbb{N}, a_i \in K\}$$

polinom $p \in K[x]$ je preslikava $p: K \to K$.

imamo seštevanje polinomov $\sum_{n=0}^{n_1} a_n x^n + \sum_{n=0}^{n_2} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\max\{n_1,n_2\}} (a_n + b_n) x^n$

množenje s skalarjem $\alpha \cdot \sum_{n=0}^{n_1} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n_1} \alpha a_n x^n$

množenje $\sum_{n=0}^{n_1} a_n x^n \sum_{n=0}^{n_2} b_n x^n =$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$
$$+ x^{n_1+n_2} \cdot a_{n_1} b_{n_2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{n_1+n_2} x^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{n_1+n_2} \left(\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} a_i b_j \right) x^n$$

konvolucija
konvolucijsko množenje

$K[x]$ je komutativna algebra.

Drugačna definicija: $K[x] = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} ; a_n \in K ;$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n = 0 \}$

NTSBIIFFT

$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$

$\lambda (a_n)_n = (\lambda a_n)_n$

$(a_n)_n (b_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right)_n$

$K[[x]] = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} ; a_n \in K \}$ množica formalnih potenčnih vrst namesto $(a_n)_n$ ali $a_0, a_1, a_2, \dots$ pišemo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$ ali $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ ~ množica zaporedij

x tukaj ni spremenljivka. ne vstavljamo v x.

K nima nujno metrike (ne potrebujemo limite za $\sum_{n=0}^{\infty}$) in ni konvergenčnega polmera.

operacije:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

KONČNA VSOTA (dobiš v vsakem primeru)

$$c_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + \dots + a_n b_0$$

s temi operacijami je $K[[x]]$ komutativna algebra.

dokažimo le komutativnost množenja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$$

), ker je K komut. obseg.

D.N. asociativnost dokaži

enota za množenje: $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} = 1 + 0x + 0x^2 + \dots = \underline{1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \underline{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{n-k,0} \right) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1 a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Def.:

kolobar K ima delitelje niča, če $\exists a, b \in K,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \ni ab = 0$.

primer $2 \cdot 3 = 0$ v $\mathbb{Z}_6$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obseg nima deliteljev niča, kajti če

$a \cdot b = 0$ in $a \neq 0$, je $a^{-1} \cdot a \cdot b = b = 0$

Trditev:

V $K[[x]]$ ni deliteljev niča.

Dokaz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{a_{n_0}} x^{n_0} + a_{n_0+1} x^{n_0+1} + \dots$$

najmanjši, ki je različen od 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{b_{m_0}} x^{m_0} + b_{m_0+1} x^{m_0+1} + \dots$$

najmanjši, ki je različen od 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \underset{\neq 0}{a_{n_0} b_{m_0}} x^{n_0+m_0} + \dots$$

$\neq 0$, ker je K obseg. $\square$

kateri elementi imajo inverz za množenje?

Trditev: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ima inverz za množenje $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

Dokaz: $(\Rightarrow)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \underline{1}$

$\underline{a_0 \cdot b_0 = 1} \Rightarrow a_0 \neq 0$

$(\Leftarrow)$ $a_0 \neq 0$. skonstruirajmo inverz

$a_0 \cdot b_0 = 1$. tak b_0 $\exists$: $b_0 = a_0^{-1}$

$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$

$b_1 = -\frac{a_1 b_0}{a_0}$ $\exists$, ker $a_0 \neq 0$

$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$

$b_2 = -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_0}{a_0}$ $\exists$, ker $a_0 \neq 0$

b_n lahko izračunam vedno. $\square$

našli smo $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Primer: $(1+2x+4x^2+\dots)(1-2x) = 1 + (-2+2)x + (0-4+4)x^2 +$

$+ \dots + (1\cdot 0 + 2\cdot 0 + \dots + 2^{n-1}(-2)+2^n)x^n$

$+ \dots = 1$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$$

opomba: $F(x) = \sum_n a_n x^n \in K[[x]]$

↳ ime formalne potenčne vrste — to ni fja!

$[x^n]F(x)$ je n-ti člen zaporedja/ fpv

$[x^0]f(x) =: F(0)$

↳ oznaka za ta koef. — ne vstavljanje 0, saj F ni fja.

$$(F\cdot G)(0) = F(0)\cdot G(0)$$

$F(x)$ je obrnljiva $\Leftrightarrow F(0) \neq 0$.

odvajanje fpv:

iz analize: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

izrek: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ za $|x|<R$.

v $K[[x]]$:

$$F(x) = \sum_n a_n x^n$$

$F'(x) := \sum_n a_{n+1}(n+1)x^n$ definicija odvajanja.

Primer: $F'(x) = F(x)$ (diferencialne enačbe)

$(n+1)a_{n+1} = a_n$

$a_1 = a_0$ $\Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$

$2a_2 = a_1$ $a_3 = \frac{a_0}{6}$ char $K = 0$

$3a_3 = a_2$ $\Rightarrow 2 \neq 0$

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

$$F(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\lambda x} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x} = \sum_n \frac{\lambda^{n+1}}{\cancel{(n+1)!} \to n! \cancel{(n+1)}} x^n$$

$$e^{\lambda x} \cdot e^{\mu x} = e^{(\lambda+\mu)x}$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \cdot n! = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n!} (\lambda+\mu)^n$$

O.N. $\left(F(x) \cdot G(x)\right)' = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$

$$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F'(x) G(x) - F(x) G(x)}{G^2(x)} \qquad \text{kadar } G(0) \neq 0$$

Kaj pa kompozitum v $K[[x]]$?

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$(F \circ G)(x) = a_0 + a_1 (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) + a_2 (b_0 + \cdots)^2 + \cdots$$

$$[x^0] = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 + \cdots$$

Ta vsota je smiselna le, če je končna.

$b_0 = 0 \Rightarrow [x_0] = a_0$

$b_0 \neq 0 \wedge F(x)$ polinom (končno členov).

Če je $F(x)$ polinom, je $(F \circ G)(x) = a_0 + a_1 G(x) + \cdots + a_n G^n(x)$

če je $G(0) = 0$, je $(F \circ G)(x) = a_0 + a_1 (b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$
$+ a_2 (b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)^2$
$+ \cdots$

$\Rightarrow [x^0] = a_0$

$[x^1] = a_1 b_1 + 0$ (vsled kvadrata)

$[x^2] = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$

$[x^3] = a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3$

$[x^n]$ je končna vsota.

Za izračun $[x^n](F \circ G)(x)$ je potrebno upoštevati le

$$a_0 + a_1 G(x) + \dots + a_n G^n(x)$$

Ta koeficient lahko izračunamo s končno mnogo operacijami.

Nimamo metrike v K, zato tudi ne limite, zato tudi ne neskončnih vsot.

Povzemimo: koef. $\exists (F \circ G)(x) \Leftrightarrow F(x)$ polinom ali $G(0) = 0$.

Primer: • $5(e^x)^3 - 2(e^x)^2 + 1$ ✓

• e^{e^x} ✗

• $e^{e^x - 1}$ ✓, saj $G(0) = 0$

• $\cos\sin x$ ✓, ker $\sin(0) = 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{6!} - \dots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

• $\sin\cos x$ ✗

IZKAŽE SE: $x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$

je enota za komponiranje.

Če je $a_0 = 0$ in $a_1 \neq 0$, ima $\sum_n a_n x^n$ inverz za kompozicijo

a ima koef. inverz?

• $F(x) = x^2$ ne, nima inverza $\cancel{\sqrt{x}}$

•