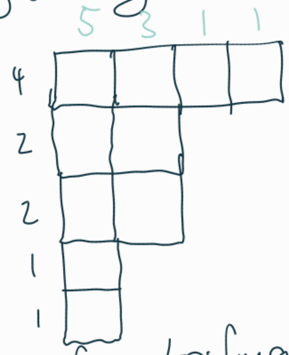
KOMB P FMF 2024-11-04

padajoče (šibko)

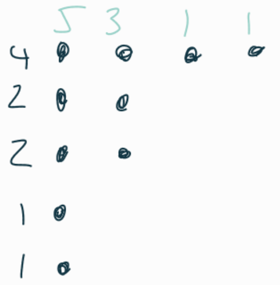
$10 = 4+2+2+1+1 = (4,2,2,1,1) = 42211$

$p(n) \qquad p_k(n) \qquad \overline{p}_k(n)$

Youngov diagram



Ferrersov diagram:



λ' je konjugirana razčlenitev:

$$42211' = \boxed{5\,3\,1\,1}$$

št. ≥ 4 št. ≥ 3 št. ≥ 2 št. ≥ 1

$$\lambda'' = \lambda$$

$\lambda_j' = \max\{i;\ \lambda_i \geq j\}$ najv. idx, ki je $\geq j$

$\lambda_j' = |\{i;\ \lambda_i \geq j\}|$ št. idxov, ki so $\geq j$

Trditev:

(1) $p_k(n) = \overline{p}_k(n-k)$

s k členi razčl. n; z največ k deli; razčlenitev $n-k$

Dokaz:

$\Rightarrow$ (1) odstranimo prvi stolpec

„največ" zato, ker je lahko drugi stolpec manjši od prvega

$\Leftarrow$ dodamo 1. stolpec s k kvadratki

Izrek + dokaz

(2) $p_k(n) =$ razčlenitev n dolžine k

zadnji člen $\lambda_e = 1$ $\qquad\qquad$ $\lambda_e \geq 2$

$p_{k-1}(n-1) \qquad\qquad p_k(n-k)$

izrek + dokaz: (3)

$$p_k(n) = p_k(n) + \overline{p_{k-1}}(n)$$

$$\downarrow (1)$$

$$p_k(n) = \overline{p_k}(n-k) + \overline{p_{k-1}}(n)$$

zelo drugačni rekurziji kot za $\binom{n}{k}, c(n,k), S(n,k), L(n,k)$

$$c(n,k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$$

manjšanje za 1, nikoli za k

$p_k(n)$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$p(n)$
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	2
3	0	1	1	1	0	0	3
4	0	1	2	1	1	0	5
5	0	1	2	2	1	1	7

$\overline{p_k}(n)$ nariši za dn.

vse razčlenitve

$$\overline{p_k}(n) = p(n)$$

rekurzija za $p(n)$?

1. načelo vključitev in izključitev

$A = \{$razčlenitve števila $n\}$

$A_i = \{$razčlenitve n, ki vsebujejo i kot člen$\}$

$|A_i| = p(n-i)$ → odstrani ti dve vrstici

$|A_i \cap A_j| = p(n-i-j)$

$$\boxed{\forall a<0 : p(a) = 0}$$

$|A_I| = p\left(n - \sum_{i \in I} i\right)$

$$p(n) = |A| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} |A_I| =$$

$$= p(n-1) + p(n-2) + p(n-3) + \dots + p(0) - p(n-1-2) - p(n-1-3) - \dots + p(n-1-2-3) + p(n-1-2-4) + \dots$$

$$- \dots + \dots - \dots = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) +$$

$$+ p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \dots$$

Zakaj brat so možni koeficienti $\{-1, 0, 1\}$

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\big(\alpha(m)-\beta(m)\big)\,p(n-m)$$

α: Število razčlenitev m z liho mnogo različnimi členi

β: Število razčl. m s sodo mnogo razl. členi.

$p(n-7)$: $\quad +p(n-\boxed{7})$

$-p(n-\boxed{1-6})-p(n-\boxed{2-5})-p(n-\boxed{3-4})$

$+p(n-\boxed{1-2-4})$

razčlenitve s samimi različnimi členi

Lema: $\alpha(m)-\beta(m)=\begin{cases}(-1)^{k-1} & ; m=\frac{k(3k\pm1)}{2}\\ 0 & ; \text{sicer}\end{cases}$ $\quad k, m \in \mathbb{N}$

$k \mapsto \frac{k(3k\pm1)}{2}$ je zaporedje Petkotniških števil

$$p(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(p\left(n-\frac{k(3k-1)}{2}\right)+p\left(n-\frac{k(3k+1)}{2}\right)\right)$$

$$p(8)=p(7)+p(6)-p(3)-p(1)$$

Dokaz leme:

brez ponavljanja členov

$b(\lambda)$ ... bok razčlenitve; $\max\{i \,;\, \lambda_i=\lambda_1-i+1\}$

$s(\lambda)$ ... najmanjši člen $= \lambda_{\ell(\lambda)}$

A. če je $s(\lambda)\le b(\lambda)$: prestavimo najmanjši člen na bok.

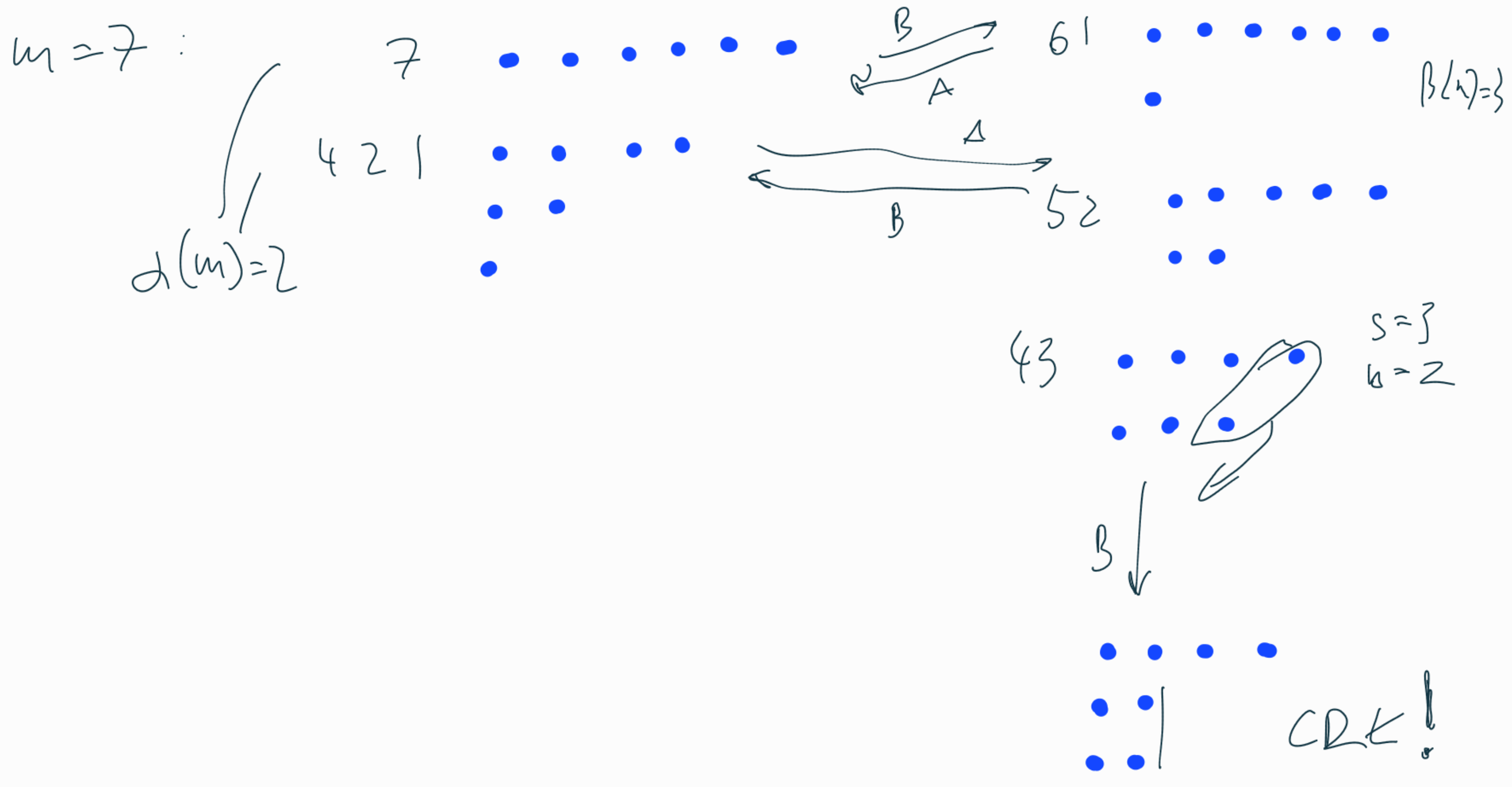
B. sicer če je $s(\lambda)>b(\lambda)$: prestavimo bok na najmanjši člen.

$m=8$:

liho mnogo		preslik.	sodo mnogo	
8	$s=8$, $b=1$	$\xrightarrow{B}$ / $\xleftarrow{A}$	71	$s=1$, $b=1$
521	$s=1$, $b=1$	$\xrightarrow{A}$ / $\xleftarrow{B}$	62	$s=2$, $b=1$
431	$s=1$, $b=2$	$\xrightarrow{A}$ / $\xleftarrow{B}$	53	$s=3$, $b=1$

$\alpha(8)=3$ $\qquad$ $\beta(8)=3$

liho $\qquad$ sodo



Opazimo, da pravilo A ne deluje, ko $s(\lambda) = \ell(\lambda) = b(\lambda)$.

ZOB kot seže do konca razčlenitve in najm. čl. je enak bolu. (skupna točka)

$1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Problematična razčlenitev:

$$2k-1, \dots, k+1, k$$

$$\sum_{i=k}^{2k-1} i = \frac{(2k-1)2k}{2} - \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k}{2}\left(\frac{4k-2-k+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{k(3k+1)}{2}$$

$$\alpha(m) - \beta(m) = \begin{cases} 1 ; & k \text{ lih} \\ -1 ; & k \text{ sod} \end{cases} = (-1)^{k-1}$$

Pravilo B tudi ne deluje, ko pa ko:

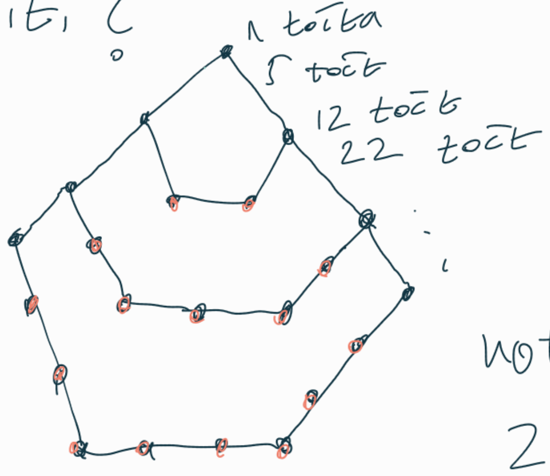
$$s(\lambda) = b(\lambda)+1 = \ell(\lambda)+1 = k+1$$

$2k, \dots, k+2, k+1$

$$\sum_{i=k+1}^{2k} = \frac{2k(2k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2}\left(\frac{4k+2-k-1}{2}\right) = \frac{k(3k+1)}{2}$$

$$\alpha(m) - \beta(m) = \begin{cases} 1 ; & k \text{ lih} \\ -1 ; & k \text{ sod} \end{cases} = (-1)^{k-1}$$

Zakaj petkotniki?



V petkotniku

notranje točke
2, 7, 15, 26, ...

3.5 DVANAJSTERA POT

angl. twelvefold way

Na koliko načinov lahko razporedimo n kroglic v k škatel

Q. • ali kroglice ločimo ali ne?

Q. • ali škatle ločimo ali ne?

Q. • ali iščemo vse možnosti ali le injekt. presl. ali le surj.?

Primer: $N = \{1,2,3\}$ $\quad K = \{a,b,c,d\}$

$f(1) = a \quad f(2) = a \quad f(3) = b$

$g(1) = a \quad g(2) = b \quad g(3) = a$

$h(1) = b \quad h(2) = b \quad h(3) = d$

$f \neq g$, $\neq_h \neq$

če ne ločimo kroglic med sabo $\quad f = g \neq h$

če ne ločimo škatel med sabo $\quad f = h \neq g$

če ne ločimo kroglic in škatel $\quad f = h = g$

f: $\frac{1,2}{a}$ $\frac{3}{b}$ $\frac{\ }{c}$ $\frac{\ }{d}$

g: $\frac{1,3}{a}$ $\frac{2}{b}$ $\frac{\ }{c}$ $\frac{\ }{d}$

h: $\frac{\ }{a}$ $\frac{1,2}{b}$ $\frac{\ }{c}$ $\frac{3}{d}$

stirlingovo št. 2. vrste

kroglic	škatel	vse	inj	surj
N	K			
L	L	k^n	$k^{\underline{n}}$	$S(n,k) \cdot k!$
N	L	$\binom{n+k-1}{k-1}$ čiste komp	$\binom{k}{n}$	kompozicij št. n dolžine k $\binom{n-1}{k-1}$
L	N	$\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$	$(n \leq k)$ tj. 0 ali 1	$S(n,k)$
N	N	$p_k(n)$	$(n \leq k)$	razčlenitve $p_k(n)$

ločimo → L

ne ločimo → N

V resnici preštevamo ekvivalenčne razrede za določene ekvivalenčne relacije.

→ kroglic ne ločimo med sabo

$f \sim_n g \iff \exists$ permutacija $\pi \in S_N$ $\ni$: $f \circ \pi = g$

Je ekvivalenčna.

število vrstic ne igra vlog

$f \sim_k g \iff \exists$ perm. $\sigma \in S_k$: $\sigma \circ f = g$

krog & št. ne loč. med sabo

$f \sim_{N,k} g \iff \exists$ perm. $\sigma \in S_k$, $\pi \in S_N$: $\sigma \circ f \circ \pi = g$

[4. RODOVNE FUNKCIJE]

4.1. UVOD.

zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je preslikava $\mathbb{N} \to K$.

naj bo K polje – komutat. obseg

primeri: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (p praštevilo)

polje: $(K, +, \cdot)$, $+, \cdot$ komutativni operaciji

$(K, +)$ je abelova grupa

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelova grupa

$+, \cdot$ distributivnost

$\forall n \in \mathbb{N}$: $n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-krat}} \in K$ v obsega

najmanjše število p, $\ni$: $\overbrace{1 + \cdots + 1}^{p\text{-krat}} = 0$ je karakteristika K

char (K).

char $\mathbb{Z}_p = p$

če tak $p \not\exists$, pravimo char $K = 0$

naša predpostavka v tem poglavju je, da za naše polje K char $K \neq 0$