KOMB PFMF 2024-10-28

Stirlingovo število: $c(n,k)$ — št. permutacij n elementov s k cikli

$c(n,n-1) = \binom{n}{2}$

$c(n,n) = 1$

$c(n,0) = \delta_{n,0}$

$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k)$

Izrek: $\sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k = x^{\overline{n}}$

Primer: $n=3$: $2x^1 + 3x^2 + 1x^3 =$

$= x(x^2+3x+2) = x(x+1)(x+2)$

Dokaz: Indukcija po $n \in \mathbb{N}_0$:

BAZA $n=0$: $1=1$

KORAK: $n-1 \to n$

$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}} \cdot (x+n-1) \overset{\text{I.P.}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)x^k \cdot (x+n-1) =$

$= \boxed{\sum_k c(n-1,k)x^{k+1}} +$ $k := k-1$

$\sum_k (n-1)c(n-1,k)x^k =$

$= \sum_k c(n-1,k-1)x^k + \sum_k (n-1)c(n-1,k)x^k =$

$= \sum_k \big(c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k)\big)x^k =$

$= \sum_k c(n,k)x^k$ $\square$

PRIMERI:

št. permutacij z vsemi števili ciklov

vse permutacije

$x=1$: $\sum_k c(n,k) = x^{\overline{n}} = 1^{\overline{n}} = n!$

NTS LESKOVŠEK

3.2 STIRLINGOVA ŠT. 2. VRSTE IN BELLOVA ŠTEVILA

Def.: Razdelitev ali razbitje (ali particija) množice A je množica množic, $\{B_1, \dots, B_k\}$, da velja:

pravimo jim bloki

- $\forall i \in [k]: B_i \neq \emptyset$
- $\forall i,j \in [k]: i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = A$

(angl. set partition)

Zgled: za $A = [6]$ je ena razdelitev $\{\{1,4,6\}, \{2\}, \{3,5\}\}$.

Def: stirlingovo št. druge vrste: $S(n,k)$ je število razdelitev množice $[n]$ s k bloki.

$B(n)$ – Bellovo število: št. vseh razdelitev $[n]$.

Zgledi:

$S(4,2)$

$\{1,2,3,4\}$

- $\{\{\_\}, \{\_,\_,\_\}\}$ $\times 4$
- $\{\{\_,\_\}, \{\_,\_\}\}$ $\times 3$

enka je v prvem bloku, št. izbir za njenega soseda.

n	$B(n)$
1	1
2	2
3	5
4	$S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4) = 1+7+6+1 = 15$

$S(n,0) = \delta_{n,0}$

$S(n,1) = 1$

$S(n,n) = 1$

$B(n) = \sum_k S(n,k)$

$S(n,n-1) = \binom{n}{2}$

Trditev: (rekurzivna zveza):

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

ZGLED:

$$B(4) = \binom{3}{0}B(0) + \binom{3}{1}B(1) + \binom{3}{2}B(2) + \binom{3}{3}B(3) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15$$

(cont.)

Dokaz: razdelitev $[n]$ s k bloki

$\{n\}$ je blok: $S(n-1,k-1)$

$\{n\}$ ni blok: $S(n-1,k)\cdot(k)$

v katerikoli blok vrnemo n — na k načinov = k blokov

---

razdelitev $[n+1]$: $n+1$ naj bo v bloku s k elementi, $0 \leq k \leq n$

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B(n+1-k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

izberemo elemente, ki so v istem bloku kot $n+1$

SUM VRSTICE

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$B(n)$
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	2
3	0	1	3	1	0	0	5
4	0	1	7	6	1	0	15
5	0	1	15	25	10	1	52

$-x^2 + x^3 = 12 \qquad x^3 - x^2 - 12 = 0$

$x^2(x-1) = 12$

NTSBMNIISTOLAH

spomni nas na ekvivalenčne razrede:

ekvivalenčna relacija:

- refleksivna: $x \sim x$
- simetrična: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- tranzitivna: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$\Rightarrow$ množica razpade na ekvivalenčne razrede, ki tvorijo razdelitev.

$S(n,k)$ = število ekv. relacij na $[n]$ s k ekv. razredi

$B(n)$ = št. ekv. rel. na $[n]$

surjekcija $f: [n] \to [k]$.

praslika

$f^{-1}(i)$ je neprazna množica $\forall i \in [k]$.

$f^{-1}(i) \cap f^{-1}(j) = \emptyset$ za $i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(i) = [n]$

surjekcija ni isto kot razdelitev pomemben je vrstni red blokov.

koliko surjekcij iz $[n]$ v $[k]$: $S(n,k)\cdot k!$

surjekcija je ~~razdelitev~~ razdelitev z vrstnim redom blokov.

koliko je $[4]\to[2]$ surjekcij? $S(4,2)\cdot 2! = 7\cdot 2 = 14$

permutacije brez negibne točke so „premestitve".

spomnimo se: #surjekcij iz $[n]$ v $[k]$ je

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n$$

Posledica: $$S(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j}\, j^n}{j!\,(k-j)!}$$

Primer: $$S(n,2) = \frac{2^n}{2} - \frac{1}{1} + \frac{\delta_{0,n}}{2!\cdot 0!} = 2^{n-1} - 1 + \frac{\delta_{n0}}{2}$$

n elementov v 2 bloka:

1 ______ ______

$n-1$

za vsak preostali element določimo v katerem bloku je

-1 zato, ker mora biti drugi blok neprazen

$\delta_{n,0}$ zato, da „popravimo" primer $n=0$

Izrek: $\sum_k S(n,k)x^k = ?$

Primer: $n=3$: $\sum_k S(3,k)x^k = x + 3x^2 + x^3 = ?$

tak pa

Izrek: $$\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}} = x^n$$

Primer: $n=3$: $\sum_k S(3,k)x^{\underline{k}} = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) =$

$= x(1 + \cancel{3x} - 3 + x^2 - \cancel{3x} + 2) =$

$= x(\cancel{1} - 3 + x^2 + \cancel{2}) = x^3$

Dokaz: · Indukcija (se da, na vajah bomo)

· Kombinatorično:

x^n : štetje preslikav iz $[n]$ v $[x] = |[x]^{[n]}|$

načinov da ložimo n z elementi iz $[x]$

vsaka preslikava je surjekcija na svojo sliko

oglejmo si vse slike $T \subseteq [x]$

$$x^n = \left|[x]^{[n]}\right| = \sum_{T \subseteq [x]} |T|!\, S(n,|T|) = \sum_k k!\, S(n,k)\binom{x}{k} =$$

po vseh možnih T

$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$

$$= \sum_k S(n,k)\, x^{\underline{k}}$$

Dokaz je veljaven za $x \in \mathbb{N}_0$.

Da dokažemo, da sta dva polinoma stopnje $\leq n$ enaka, je dovolj preveriti ujemanje v $n+1$ različnih točkah, kajti razlika je polinom stopnje $\leq n$, če ni ničeln ima $\leq n$ ničel, kar je v neskladju s tem, da se polinoma ujemata v $n+1$ točkah (v ničlah se ne).

Imamo polinoma stopnje n, ki se ujemata v ∞ točkah, torej sta enaka.

NTSBLt-9

[3.3 Lahova števila] Ivo Lah (slovenski aktuar)

Def: $L(n,k)$ je število razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov. $\{152, 3674\} = \{3674, 152\}$, toda $\{152, 3674\} \neq \{125, 3764\}$.

$L(4,2) = |\{\{\_, \_\_\_\}, \{\_\_, \_\_\}\}| = 36$

$\{\_, \_\_\_\}$: $4 \cdot 3! = 24$

$\{\_\_, \_\_\}$: $3 \cdot 2! \cdot 2! = 12$

- 3: kateri v prvem bloku, ostali
- $2!$: vrstni red I. bloka
- $2!$: vrstni red II. bloka

Rekurzivna zveza za Lahova števila:

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + L(n-1,k) \cdot (n-1+k)$$

Dokaz: razdelitev $[n]$ na k lin. uref. blokov:

- (n) je blok: $L(n-1,k-1)$
- (n) ni blok: $L(n-1,k) \cdot (n-1+k)$

n za nek el. ali na začetek bloka

Trditev:

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{k-1}{n-1} \qquad n,k \geq 1$$

$L(4,2) = \frac{4!}{2!}\binom{3}{1} = 36$

$L(n,n) = 1 \qquad L(n,n-1) = n(n-1)$

$L(n,1) = n!$

Preštejmo urejene razdelitve na lin. uref. bloke na dva načina: $k!\,L(n,k) = n!\binom{n-1}{k-1}$

$\uparrow$ enodine škatle $\uparrow$ razdelitev $\downarrow$ permutacija $\downarrow$ kompozicije (Lunegrade)

Izrek: $\sum_k L(n,k)\, x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$

Dokaz z indukcijo:

BAZA: $n=0$ ✓

KORAK: $n-1 \to n$

$$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) = \sum_k L(n-1,k)\, x^{\underline{k}} \overbrace{(x+n-1)}^{(x-k)+(n+k-1)} =$$

$$= \underbrace{\sum_k L(n-1,k)\, x^{\underline{k+1}}}_{\parallel} + \sum_k L(n-1,k)\, x^{\underline{k}}(n+k-1) =$$

$$= \sum_k L(n-1,k-1)\, x^{\underline{k}} + \sum_k L(n-1,k)\, x^{\underline{k}}(n+k-1) =$$

$$= \sum L(n,k)\, x^{\underline{k}}$$

opombe: $S(n,k) \leq c(n,k) \leq L(n,k)$

$$\sum_k c(n,k)\, x^k = x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k S(n,k)\, x^{\underline{k}} = x^n$$

$$\sum_k L(n,k)\, x^{\underline{k}} = x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k c(n,k)(-1)^k x^k = (-1)^n x^{\overline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} c(n,k)\, x^k = x^{\underline{n}}$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} S(n,k)\, x^{\overline{k}} = x^n$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} L(n,k)\, x^{\overline{k}} = x^{\underline{n}}$$

NTSMBRELAL

operacije v algebri: seštevanje, množenje, množenje s skal.
①, ②, ③

① + ② kolobar

① + ③ vek. pr. — enakovredno

① + ② + ③ (komut.) algebra

$m \times m$ matrike so nekomutativne algebre

$\mathbb{R}[x]$ je neskončnorazsežen vektorski prostor

$\{1, x, x^2, \dots\}$ je baza — ena izmed — $\mathbb{R}[x]$

$\{1, x, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, \dots\}$ sta tudi bazi

$\{1, x, x^{\overline{2}}, x^{\overline{3}}, \dots\}$

način od padanja zvez nam daje prehodne matrike med bazami

$$(-1)^{n-k} c(n,k) =: s(n,k)$$

predznačeno stirlingovo število 1. vrste.

[Razčlenitve in eulerjev petkotniški izrek]

Def.: Razčlenitev (angl. integer partition) $n \in \mathbb{N}_0$ je

kot par zaporedje $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$; $\forall i \in [\ell] : \lambda_i > 0$

; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$

; $\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell = n$

λ_i je člen razčlenitve

ℓ je dolžina

n je velikost.

$p_k(n)$ — št. razč. št. n dolžine k

$\overline{p_k}(n)$ — št. razč. št. n dolžine $\leq k$

$p(n)$ — št. razčlenitev števila n

Primer: $p(0) = 1$ $\quad p(1) = 1$ $\quad p(2) = 2$ $\quad p(3) = 3$ $\quad p(4) = 5$

$p(5) = 7$ $\quad p_3(5) = 2$ $\quad \overline{p_3}(5) = 5$

5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111