KOMBP 2024-10-21

[2.6 NAČRTI IN t-NAČRTI]

$S \subseteq X \times Y$ je relacija.

za $x \in X$ in $y \in Y$ velja $x S y \Leftrightarrow (x, y) \in S$

---

def za $x \in X$ $\quad v_x(S) := |\{y \in Y : x S y\}|$

↳ število enic v vrstici x.

def za $y \in Y$ $\quad s_y(S) := |\{x \in X : x S y\}|$

↳ št. enic v stolpcu y

in velja

$$|S| = \sum_{x \in X} v_x(S) = \sum_{y \in Y} s_y(S)$$

kdaj se zgodi, da je $\forall x, x' \in X: v_x(S) = v_{x'}(S)$, tedaj označimo tem z $v(S)$ in analogno za $s(X)$.

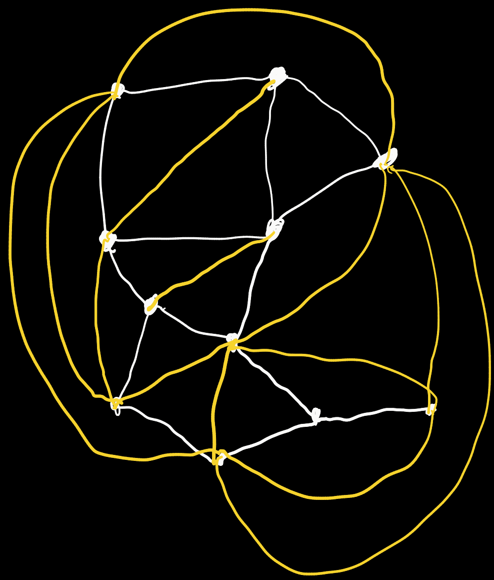
↳ in velja $\sum_{x \in X} v_x(S) = v(S) \cdot |X|$

če velja oboje: $v(S) \cdot |X| = s(S) \cdot |Y|$

Primeri:

(1). ravninski graf

triangulacija ravninskega grafa



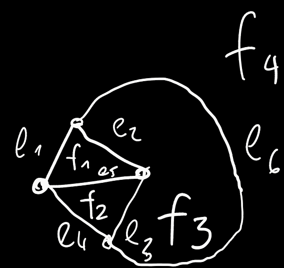
ni triangulacija, ker niso vsa lica 3-cikli.

z dodanimi RUMENIMI povezavami pa je triangulacija.

lica \ povezave	e
f	✓ $\Longleftrightarrow e \in f$

e – povezava, f – lice

ta



lica \ povezave	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
f_1	✓	✓			✓	
f_2			✓	✓	✓	
f_3		✓	✓			✓
f_4	✓			✓		✓

opazimo: v vsaki vrstici 3 kljukice in v vsakem stolpcu sta 2.

$$v(S)=3, \quad s(S)=2 \quad \Longrightarrow \quad 3|F| = 2|E|$$

2. Koliko deliteljev ima „v povprečju" število n?

npr.: $n=4$:

št.	1	2	3	4	avg:
#del.	1	2	2	3	2

Kaj pa za velik n?

x \ y	1	2	3	4
1	✓	✓	✓	✓
2		✓		✓
3			✓	
4				✓

$\checkmark \iff x \mid y$

$S_y(S) = \#\text{del. } y$

$V_x(S) = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{n} \#\text{del. } j$$

Koliko je povprečje?

asimptotsko enako

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \#\text{del. } j \sim \frac{1}{\cancel{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\cancel{n}}{i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n \sim$$

n-to harmonično število

$$\sim \ln(n)$$

Def.: asimptotsko enako:

$$a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Izrek (Stirlingova formula):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

malo

2^n izračunamo v $\log_2 n$ oper.

$n!$ v n operacijah (veliko)

Motivacija: izdelek v več različicah, podjetje jih testira na več potrošnikih.

zahteve:

1. hočemo, da vsak potr. testira enako različic
2. hočemo, da je vsaka različica enakokrat testirana

temu pravimo NAČRT:

Def.: $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$ je načrt s parametri (v, k, λ), če velja $B_1, \dots, B_b \subseteq [v]$, $\forall i \in \{1..b\}: |B_i| = k$,

št. potrošnikov

št. različic

koliko različic testira vsak potrošnik

$\forall i \in \{1..v\}\ \exists$ natanko λ množic, v katerih je i vsebovan

izdelek

toliko potrošnikov testira vsako različico

$$\begin{array}{c|ccc} & B_1 & \dots & B_b \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & & \\ v & & & \end{array}$$

1 v B_j: $i \in B_j$

v vrstici λ enic

v stolpcu k enic

$v \cdot \lambda = k \cdot b$

potreben pogoj za načrt je, da $k \mid v \cdot \lambda$

in da $b \leq \binom{v}{k}$

$$\Rightarrow \frac{v \cdot \lambda}{k} \leq \binom{v}{k}$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \cancel{\frac{k}{v}} \cdot \frac{\cancel{v!}\,(v-1)!}{\cancel{k!}\,(v-k)!} = \underbrace{\binom{v-1}{k-1}}$$

$(k-1)!$

k-elementnih podmnožic $[v]$, ki vsebujejo i

Glavni izrek o načrtih

Izrek: načrt s parametri (v, k, λ) $\exists \Leftrightarrow$

$$\lambda \leq \binom{v-1}{k-1} \wedge k \mid v \cdot \lambda$$

Dokaz:

$(\Longrightarrow)$ že dokazano – potreben pogoj

$(\Longleftarrow)$ po predp. $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1} \wedge k \mid v \cdot \lambda$.

Primer: $v=8$ $k=4$ $\lambda=3$

$4 \mid 8 \cdot 3$ ✓

$3 \leq \binom{7}{3} = 35$ ✓

$$b := \frac{v\lambda}{k}$$

izberimo poljubnih b $\neq$ (različnih) k-podmnožic $[v]$.

to lahko naredimo, ker je $b \leq \binom{v}{k}$. pogoj: $b = \frac{v\lambda}{k} \leq \frac{v}{k}\binom{v-1}{k-1} = \binom{v}{k}$. ✓

$$b = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$$

vzamemo npr.:

1 2 3 4
1 3 5 6
1 5 6 7
1 5 6 8
2 3 5 6
3 4 5 7

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_4 = 2 \quad \lambda_7 = 2$
$\lambda_2 = 2 \quad \lambda_5 = 5 \quad \lambda_8 = 1$
$\lambda_3 = 4 \quad \lambda_6 = 4$

to ni načrt.

let λ_i ... v toliko blokih je i.

$\overline{\lambda_i} = \lambda$ v splošnem

B_j

i

Če so vsi $\lambda_h = \lambda$ imamo načrt in smo končali, sicer vzamemo i in j, da $\lambda_i < \lambda < \lambda_j$ (gotovo $\exists$).

k elementov v stolpcu, a v vsaki vrstici ni nujno enako elementov — v i-ti vrstici je λ_i elementov.

$$\sum_{i=1}^{v} \lambda_i = k \cdot b = \lambda v$$

Bloki so štirih tipov:

I: $i, j \in B$
II: $i \notin B$, $j \in B$
III: $i \in B$, $j \notin B$
IV: $i \notin B$, $j \notin B$

$$\lambda_i = |\mathrm{I}| + |\mathrm{III}|$$
$$\lambda_j = |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}|$$

vemo $\lambda_i < \lambda_j \Rightarrow \underline{|\mathrm{III}| < |\mathrm{II}|} \Rightarrow$ gotovo $\exists$ vsaj en blok tipa II.

treba je še dokazati, da obstaja blok tipa II., kjer pri menjavi elementa j z elementom i dobimo blok, ki še ne obstaja.

vemo, da je blokov tipa II gotovo več od blokov tipa III.

Ko naši menjavi dobimo iz bloka II blok III. ker je blokov tipa III več od blokov tipa II, ∃ blok tipa II, da ob menjavi dobimo nov blok tipa III, ki še ni med popravljenimi bloki → je nov.

zakaj se algoritem ustavi?

> prosim, ne berite mi misli. - LP Anton.

$\sum_{i=1}^{v} |\lambda_i - \lambda|$ je na vsakem koraku za 2 manjša.

to je vsota enaka $\boxed{\lambda}$ ali 0, se ustavi in

λ → nedosegljivo stanje; sicer $\lambda \neq \lambda_i$

imamo načrt.

konstruktiven dokaz ☺

Def.: t-načrt. $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$ je t-načrt s parametri (v, t, λ_t), če se ne le vsak element pojavi t-krat, temveč se celo vsaka t-elementna podmnožica $[v]$ pojavi t-krat.

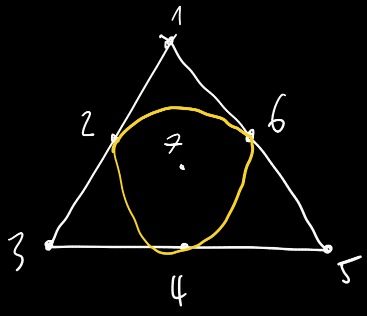
ZOB $\mathcal{B}$ je načrt in $\forall A \subseteq [v] : A \subseteq B_j$ za natanko λ_t indeksov j.

načrt je isto kot 1-načrt.

⇒ t-načrt je posplošitev načrta.

Primeri:

(1). Fanova ravnina



$v=7$

zapiši vse tč., ki ležijo na isti premici. Ker je ○ tudi „premica"

1 2 3
1 5 6
1 4 7
2 5 7
3 4 5
3 6 2
2 6 4

a je to načrt?

a je to 2-načrt?

DA.

DA.

$v=7,\ k=3,\ \lambda_2=1$

$\lambda_1=3$

(2) 3-načrt s parametri 8, 4, 1.

1 2 3 5
1 2 4 8
1 2 6 7
1 3 4 6
1 3 7 8
1 4 5 7
1 5 6 8
2 3 4 7
2 3 6 8
2 4 5 6
2 5 7 8
3 4 5 8
3 5 6 7
4 6 7 8

IZREK: Če je B t-načrt s parametri (v, t, λ_t) je tudi $(t-1)$-načrt s parametri (v, t, λ_{t-1}), kjer je $\lambda_{t-1} = \frac{v-(t-1)}{t-(t-1)}$

DOKAZ:

let $S \subseteq [v]$, $|S| = t-1$

let $\lambda_S :=$ v toliko blokih je S vsebovan?

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline i & \end{array}$$

$\checkmark \Leftrightarrow i \notin S \wedge S \cup \{i\} \subseteq B$

v vrstici je za dani i: 0 kljukic, če $i \in S$,

sicer (če $i \notin S$), pa λ_t kljukic

v stolpcu je zadani B:

$S \not\subseteq B$: 0 kljukic

$S \subseteq B$: $t-(t-1)$ kljukic

$$\underbrace{v-(t-1)}_{\text{tolikokrat se zgodi, da } i \notin S} \cdot \lambda_t = \underbrace{\lambda_S}_{S \subseteq B} \cdot (t-(t-1))$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_S = \frac{v-(t-1) \cdot \lambda_t}{t-(t-1)}$$

neodvisen od S

$$\lambda_S = \lambda_{t-1}$$

$\square$

[3. PERMUTACIJE, RAZDELITVE, RAZČLENITVE]

[3.1 STIRLINGOVA ŠTEVILA 1. VRSTE]

$c(n,k)$ = število permutacij n elementov, ki imajo k ciklov

$c(3,1)=2 \quad c(3,2)=3 \quad c(3,3)=1$

$c(4,2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11$

$c(n,n) = 1 \qquad c(n,n-1) = \binom{n}{2} \qquad c(n,1) = (n-1)!$

$$c(n,0) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 0 ; & n=1 \\ 1 ; & n=0 \end{cases}$$

$\sum_k c(n,k) = n!$ vse permutacije

Izrek: $c(n,k) = c(n-1,k-1) + c(n-1,k) \cdot (n-1)$

Dokaz: permutacije v S_n s k cikli

vsebuje (n): $c(n-1,k-1)$

ne vsebuje (n): $c(n-1,k) \cdot (n-1)$

če n odstranimo, se # ciklov ne spremeni.

v tako permutacijo (z odstr. n) lahko n vstavimo na $n-1$ načinov

na toliko načinov lahko vstavimo nazaj n v permutacijo za nek el.?

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0
4	0	6	11	6	1	0
5	0	24	50	35	10	1