KOMB P FMF 2024-10-14

$(\lambda_1, \dots, \lambda_e)$; $\lambda_i \geq 1$ je kompozicija za n, če

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_e = n.$$

število kompozicij števila n je 2^{n-1} za $n \geq 1$

število kompozicij števila n s k členi je $\binom{n-1}{k-1}$ za $n, k \geq 1$

Dokaz: kompozicijo lahko predstavimo s kroglicami in pregradami:

$4+2+2+3+1$: 0000|00|00|000|0

kompozicija št. n : $n-1$ možnih pregrad,

$\cong$ vsi dvojiški nizi dolžine $n-1$ $\Rightarrow$ 2^{n-1}

da bo k členov, moramo vstaviti $k-1$ pregrad:

↳ izbrati $k-1$ mest :

$\binom{n-1}{k-1}$ možnosti.

IZREK:

$\left.\begin{array}{l}\text{Št. šibkih kompozicij s } k \text{ členi: } \binom{n+k-1}{k-1} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$ za $n, k \geq 1$

DOKAZ - 1. način:

kroglice in pregrade:

|0|0|0|0|0|0|0|0|0|0|0|0|0|

z rumeno so označena možna mesta za pregrade; $n+1$

$0+3+0+0+2+1$: |000|||00|0

$\underbrace{\text{| 0 0 0 | | | 0 0 | 0}}_{}$

imamo $n+k-1$ objektov ~ pregrad in kroglic.

izberimo $k-1$ mest za pregrade:

$\binom{n+k-1}{k-1}$ možnosti

DOKAZ – 2. način:

$x_1 + \dots + x_k = n \quad (x_i \geq 0)$ iščemo št. rešitev te enačbe

vzemimo $y_i := x_i + 1$, sedaj je $y_i \geq 1$ in velja $\underline{y_1 + \dots + y_k = n+k}$

običajne kompozicije števila $n+k$ s k členi:

$$\binom{n+k-1}{k-1} \text{ rešitev.} = \binom{n+k-1}{n}$$

DOKAZ – 3 način:

Zakaj sta podobni formuli za število šibkih kompozicij in število kombinacij s ponavljanjem?

šibkih kompozicij → rešitve enačbe $x_1 + \dots + x_k = n$ za $x_i \geq 0$

kombinacij s ponavljanjem →

x_i: kolikokrat izberemo ito kroglico $x_i \in \{0..n\}$

$x_1 + \dots + x_n = k$

k → število izbranih kroglic.

n → število različnih kroglic.

(NVI)

[2.4 NAČELO VKLJUČITEV IN IZKLJUČITEV]

angl.: principle of inclusion and exclusion (PIE)

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

IZREK: $A_1, \dots, A_n \subseteq A$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots - \dots + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1\le j_1<\dots<j_i\le n} |A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_i}| =$$

let $M := \{A_1, \dots, A_n\}$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{X\in 2^M} \left| \begin{cases} \emptyset; & |X|\neq i \\ \bigcap_{Y\in X} Y; & \text{sicer} \end{cases} \right| =$$

let $I \subseteq [n]$

$A_I := \bigcap_{i\in I} A_i$

npr. $A_{\{2,4,8\}} = A_2 \cap A_4 \cap A_8$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|-1} |A_I|$$

Dokaz: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

gotovo ≥ 1

Denimo, da je x element natanko m množic izmed $A_1, \dots, A_n$

Koliko je potem prispevek x k vsoti na desni?

$$m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \dots = -\underbrace{\left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3}\right)}_{0} + 1 =$$

$$= 1$$

vsak el. smo šteli natanko enkrat. □

izrek (NVI, druga verzija):

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| =$$

tukaj: $A_\emptyset = A$ (prazen presek je univerzum)

Dokaz:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A| + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} |A_I| =$$

$$= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} |A_I|$$

Primer: (1) Preštej permutacije brez negibnih točk v S_n.

$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2 \sim (1\,3\,2)$ in $(1\,2\,3)$

$a_4 = 6 \sim (1\,2\,3\,4)(1\,2\,4\,3)(1\,3\,2\,4)(1\,3\,4\,2)(1\,4\,2\,3)(1\,4\,3\,2)$

let $A := S_n$

$$A_i := \underbrace{\{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}}_{\text{vse permutacije, da } i \text{ je negibna tč.}}$$

torej $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = \{\pi \in S_n ;\ \pi \text{ nima negibne točke}\}$

$|A_i| = (n-1)!$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$|A_I| = (n-|I|)!$

$$a_n = \sum_{I \subseteq [n]} \underbrace{(-1)^{|I|}(n-|I|)!}_{} =$$

odvisno le od moči I, ne tudi od vsebine I.

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)! \underbrace{\binom{n}{i}}_{} =$$

tolikokrat se ta moč ponovi

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cancel{(n-i)!} \frac{n!}{i!\,\cancel{(n-i)!}} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Q Kakšna je verjetnost, da je naključno izbrana permutacija brez negibne točke?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

Prestej surjekcije $[n]\to[k]$.

$$A = [k]^{[n]}$$

$$A_i = \{f:[n]\to[k];\ \forall j\in\{1..n\}: f(j)\neq i\} =$$

$$= \{f:[n]\to[k]\setminus\{i\}\} \quad \text{za} \quad i\in\{1..k\}$$

$$|A_i| = (k-1)^n \qquad A_i\cap A_j = \{f:[n]\to[k]\setminus\{i,j\}\}$$

$$|A_i\cap A_j| = (k-2)^n$$

$$A_I = \{f:[n]\to[k]\setminus I\}$$

$$|A_I| = (k-|I|)^n$$

$$\left|\{f:[n]\to[k];\ f \text{ surjekcija}\}\right| = \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\right| = \sum_{I\subseteq[k]} \overbrace{(-1)^{|I|}(k-|I|)^n}^{\text{odvisno le od moči } I} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i (k-i)^n \binom{k}{i} \underset{j=k-i}{=} \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n$$

Primer: koliko je surjekcij v množico z 2 elementoma? s tremi?

$k=2$: $(-1)^0\binom{2}{0}0^n-(-1)^1\binom{2}{1}1^n+(-1)^2\binom{2}{2}2^n=2^n-2+\delta_{n,0}$

$k=3$: $-\delta_{n,0}+3-3\cdot 2^n+3^n$

Eulerjeva funkcija ϕ ~ angl. totient function

$\phi(n)=$ št. elementov, ki so manjši ali enaki n in tuji n $=\left|\{i\in[n]: D(i,n)=1\}\right|$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

$\phi(p)=p-1$ za praštevila $p\in\mathbb{P}$

$\phi(p^2)=p^2-p$ večkratniki p

$\phi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$

$\sum_{d|n}\phi(d)=n$
delitelji n

Dokaz: $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n}{n}$ in ji}

pokrajšajmo, kolikor se da:

$\frac{1}{12},\frac{2}{12},\frac{3}{12},\frac{4}{12},\frac{5}{12},\frac{6}{12},\frac{7}{12},\frac{8}{12},\frac{9}{12},\frac{10}{12},\frac{11}{12},\frac{12}{12}$

$\frac{1}{12},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{5}{12},\frac{1}{2},\frac{7}{12},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{11}{12},\frac{1}{1}$

možni imenovalci delitelji n,

možnih števcev z imenovalcem d je $\phi(d)$

let $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$; $\alpha\geq 1$

$A=[n]$; $A_i=\{$večkratniki p_i v $[n]\}$ $i\in\{1..k\}$

presek komplementov so tuja n.

$|A_i| = \lfloor n/p_i \rfloor = \frac{n}{p_i}$ $\quad p_i \mid n$ $\qquad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i \cdot p_j}$.

$$|A_I| = \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$$

$$\phi(n) = \sum_{I \subseteq \{k\}} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$$

št. praštevil v razcepu n

tolikšen člen ni odvisen le od $|I|$.

primer $k=2$:

$$\phi(n) = n \sum_{I\subseteq\{1,2\}} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} = n\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1 p_2}\right) =$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)$$

$$\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

po distributivnosti

$$\phi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

praštevilski delitelji n

2.5 MULTINOMSKI KOEFICIENT & MULTINOMSKI KREK

Recimo, da imamo multimnožico $M := \{1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, n^{a_n}\}$

množica, toda dovolimo ponavljanje

1 se pojavi a_1-krat ... itd

recimo $M = \{1,1,1,2,3,3\} = \{1^3, 2^1, 3^2\}$

Koliko je permutacij multimnožice?

$N = a_1 + \dots + a_n$. enice razporedimo na $\binom{N}{a_1}$ načinov dvojke na $\binom{N}{a_2}$

trojke $\binom{N}{a_3}$

$\vdots$ $\vdots$

skupaj $\binom{N}{a_1}\binom{N}{a_2}\cdots$

$$\frac{(a_1+\dots+a_n)!}{a_1!\,\cancel{(a_2+\dots+a_n)!}}\cdot\frac{\cancel{(a_2+\dots+a_n)!}}{a_2\,\cancel{(a_3+\dots+a_n)!}}\cdots=\frac{N!}{a_1!}\cdot\frac{1}{a_2!}\cdot\ldots=$$

$$=\frac{(a_1+\dots+a_n)!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_n!}=:\binom{N}{a_1,\dots,a_n}$$

drug način razmišljanja: (intuitiven)

permutiramo el. tretirano kot različne $\to$ $N!$ načinov, nato delimo s faktorjem fakultet posameznih
enakih elementov, saj teh elementov ne moremo razlikovati.

$$\binom{a+b}{a,b}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}=\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b}$$

Multinomski izrek: kako razpisati multinom na n-to potenco:

$$(x_1+\dots+x_k)^n=\sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n\\ i_1,\dots,i_k\geq 0}}\binom{n}{i_1,\dots,i_k}x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$$

šibke kompozicije n dolžine k