KOMB P FMF 2024-10-07

$|S_n| = n$

$\pi \in S_n \qquad k \in [n]$

zapor.: $k, \pi k, \pi^2 k, \ldots$

Dirichlet: $\exists i > j: \pi^i(k) = \pi^j(k)$

$\Rightarrow \pi^{j-i}(k) = k$

$k \to \pi(k) \to \pi^2(k) \to \ldots \to k$

$(k, \pi(k), \ldots)$ cikel

Posledica: Vsaka permutacija je produkt disjunktnih ciklov

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1, 4, 6, 8, 5, 3, 7)(2)$$

2 je negibna/fiksna točka

cikli medsebojno komutirajo.

tak cikel dolžine 1 lahko izpustimo

cikel je invarianten za ciklično shiftanje/vrtenje.

Do vrstnega reda ciklov in znotrajciklične ureditve je zapis permutacije kot produkt disjunktnih ciklov enoličen.

Trditev: let N, K množici, $|N| = n$, $|K| = k$.

a.) koliko je preslikav iz N v K? $\quad |K^N| = ?$

$$|K^N| = |K|^{|N|}$$

b.) koliko je inj. presl. iz N v K? $\quad |\{f: N \hookrightarrow K : f \text{ inj}\}| = ?$

$k(k-1)\cdots(k-n+1)$

občasno pišemo tudi

$k^{\underline{n}} = (k)_n$

|| označimo

$k^{\underline{n}}$ včasih „k na n padajoče"

<u>Dokaz (intuitiven):</u>

$N = \{x_1, \dots, x_n\}$

a) za vsak x_i imamo k izbir, kam se bo preslikal x_i

izbire so neodvisne: $\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n\text{-krat}} = k^n$

b.) za x_1 je k izbir, za x_2 $k-1$, ...

formalen dokaz za a:

iščemo bijekcijo med K^N in $[k]^n$.

$\Psi : K^N \to [k]^n$

$\Psi(f) = (j_1, \dots, j_n)$, če $f(x_i) = y_{j_i}$

opomba: v trditvi a) smo formalno prešteli urejene izbire s ponavljanjem

↳ Variacije s ponavljanjem

v trditvi b) smo prešteli urejene izbire brez ponavljanja

↳ Variacije brez ponavljanja

komentar: za $k = n$ so injektivne preslikave tudi surjektivne in s tem bijektivne:

$n^{\underline{n}} = n!$

oznaka $k^{\overline{n}}$: k na n naraščajoče

$= k(k+1) \cdots (k+n-1)$

2. PODMNOŽICE IN NAČRTI
2.1 BINOMSKI KOEFICIENTI

let $n, k \in \mathbb{N}$, A množica.

$\binom{A}{k} :=$ vse k-elementne podmnožice A zOB

$\{B \subseteq A;\ |B| = k\}$

$$\binom{[4]}{2} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

$$\binom{[4]}{4} = \{\{1,2,3,4\}\}$$

$$\binom{[4]}{1} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$

$$\binom{[4]}{0} = \{\{\}\} = \{\emptyset\}$$

$$\binom{[4]}{-1} = \emptyset$$

$$\bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k} = 2^A$$

Binomski koef. / simbol:

n nad k

n choose k

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

neurejeni pari

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

najdimo bijekcijo

$$\Phi : \binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k}$$

$$\Phi(B) = B^c$$

$$\Phi^{-1}(B) = B^c$$

Trditev: $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & ; \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases}$

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dokaz:

1. način: izberemo 1. el. množice na n načinov
2. el. $n-1$
$\vdots$
k $n-k+1$

delimo s številom permutacij $[k]$, ker smo vsako podmnožico šteli večkrat - $k!$-krat.

$\Rightarrow$ podmnožic je $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

2. način: preštejemo urejene izbire brez ponavljanja na dva načina

↳ $n^{\underline{k}}$ (izberemo k elementov, za 1. imamo n možnosti, za 2. $n-1$ $\vdots$)

↳ izberemo k-elem. podmn. in ji določimo vrstni red: $k! \cdot \binom{n}{k}$

$$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} k!$$

če je $k < 0$ ali $k > n$: $\binom{n}{k} = 0$, sicer

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Primer $\binom{10}{7} = ? = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6} = 120$

Trditev (rekurzivna zveza za binomske koef.):

$$\forall n,k \in \mathbb{N}: \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

nedvoumljivo, ni nujno, da je $0 \le k \le n$.

Dokaz (računsko):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(n-1)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{k(n-1)^{\underline{k-1}} + (n-1)^{\underline{k}}}{k!} =$$

$$= \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}(k+n-\cancel{1}-k+\cancel{1})}{k!} = \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}\cdot n}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

Drugi dokaz (bijektivni):

intuitivno: načelo vsote.

vzemimo k-elementno podmnožico $[n]$

z

k-podmnožico $[n]$

klasificirajmo jo glede na vsebnost n.

n je element te podmnožice — takih je $\binom{n-1}{k-1}$

n ni element te podmnožice — takih je $\binom{n-1}{k}$

očitno sta ti množici disjunktni

formalno: iščemo bijekcijo $\Phi: \binom{[n]}{k} \to \binom{[n-1]}{k-1} \cup \binom{[n-1]}{k}$

$$\Phi(B) = B \setminus \{n\}$$

$$\Phi^{-1}(B) = \begin{cases} B \cup \{n\} & ; |B| = k-1 \\ B & ; |B| = k \end{cases}$$

[Pascalov trikotnik]

običajno ničle izpuščamo

	$k=0$	$k=1$	$k=2$			
$n=0$	1	0				
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

uporabimo od prej znano rekurzijo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

$$\bigcup_{k=0}^{n}\binom{[n]}{k}=2^{[n]}$$

disjunktne $\Rightarrow$ $\left|\bigcup_{k=0}^{n}\binom{[n]}{k}\right|=\left|2^{[n]}\right|$

„še se vrnemo v svedrijo kolo"

[BINOMSKI IZREK] potenca dvočlenika / binoma

$$(a+b)^n=?\;=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

velja, če sta a in b elementa komut. kolob. v polja

Dokaz: 1. induktivno:

Baza: $n=0$: $1=\binom{0}{0}a^0b^0=1$

$n-1\to n$: $(a+b)^n=(a+b)^{n-1}(a+b)\overset{I.P.}{=}$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^k\right)(a+b)$$

$=$

$$\| $$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^{k+1}$$

$$\| \quad k'=k+1$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^{k} + \sum_{k'=1}^{n}\binom{n-1}{k'-1}a^{n-k'}b^{k'} =$$

dodamo le člen 0

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\Bigg[\underbrace{\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}}_{\text{rekurzivni obrazec}}\Bigg]a^{n-k}b^{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

2. način dokaza:

$$(a+b)^n = \sum_{k}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

vsota po vseh celih k - vredu, dodamo le ničelne člene

BAZA: ✓

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = \sum_{k}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^{k}(a+b) =$$

$$= \sum_{k}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^{k} + \sum_{\substack{k \\ k:=k+1}}\binom{n-1}{k}\underbrace{a^{n-1-k}b^{k+1}}_{\text{zamaknemo}} =$$

$$= \sum_{k}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^{k} + \sum_{k}\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^{k} =$$

$$= \sum_{k}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]a^{n-k}b^{k} = \sum_{k}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

3. način dokaza: $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$

po distributivnosti je to vsota členov, ki so produkt enega člena iz prvega oklepaja, enega člena iz drugega, ...

Če smo k-krat izbrali b, smo $n-k$-krat izbrali a (skupno n izbir).

Torej je vsak člen oblike $a^{n-k}b^k$, $0 \le k \le n$.

Člen $a^{n-k}b^k$ dobimo na $\binom{n}{k}$ načinov, ker moramo iz n oklepajev izbrati k oklepajev, kjer vzamemo b.

Posledica: $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

za $x = 1$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

za $x = -1$:

$$0^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n0}$$

Kroneckerjeva delta!

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

$$0^n = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

$\forall n > 0$

$$\sum_{k \text{ sod}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ lih}} \binom{n}{k}$$

število podmnožic sode moči = število podmnožic lihe moči

formalno: bijekcija Φ. izberimo & fiksiramo element u:

$$\Phi(B) = \begin{cases} B \cup \{u\} & ; u \notin B \\ B \setminus \{u\} & ; u \in B \end{cases}$$

[2.2 IZBORI] imamo n kroglic, k jih izberemo.

- ali je vrstni red pomemben
- ali kroglice vračamo v boben

	s ponavljanjem	brez ponavljanja
vrstni red je pomemben Variacije	n^k	$n^{\underline{k}}$
vrstni red ni pomemben Kombinacije	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$

$1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k \le n$ Koliko je rešitev tega sistema neenačb?

let $j_1 := i_1$
let $j_2 := i_2 + 1$
let $j_3 := i_3 + 2$
let $j_4 := i_4 + 3$
$\vdots$
let $j_k := i_k + k - 1$

BIJEKCIJA enako je rešitev teh dveh sistemov

sedaj

$1 < j_1 < j_2 < \dots < j_k < n+k-1$

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$$

Primer:

let $n=3$; $k=3$:

1	1	1	1	2	3
1	1	2	1	2	4
1	2	2	1	3	4
1	2	3	1	3	5
1	3	3	1	4	5
2	2	2	2	3	4
2	2	3	2	3	5
2	3	3	2	4	5
3	3	3	3	4	5

[kompozicije]

pozitivna cela števila

Def.: let $n \in \mathbb{N}$. Rečemo, da je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, $\lambda_i \geq 1$ takšen, da $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$, kompozicija št. n

vrstni red je pomemben

rečemo, da je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$, takšen, da $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$, šibka kompozicija št. n.

oznake: $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ so členi

ℓ je dolžina

n je velikost

kompozicije

vse komp. $n=3$: $(3), (2,1), (1,2), (1,1,1)$

$$3 = 3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$$

ena šibka kompozicija $n=3$: $(2,0,0,0,1,0,0,0)$

(vseh je neskončno)

Q:

koliko je kompozicij za dan n?

Izrek: # kompozicij n $= 2^{n-1}$ za $n \geq 1$

kompozicij n dolžine k $= \binom{n-1}{k-1}$ za $n \geq 1$ in $k \geq 1$

šibkih kompozicij n dolžine k $=$ D.N.