KOMBPFMF2024-10-01

prof. Matjaž Konvalinka
asist. Arjana Žitnik

pisni: izpit lahko nadomestita kolokvija

ustni izpit – pogoj je poz. oc. iz pisnega
↳ do 12. 9 (konec jes. izp. obd.)
↳ pisni izpit omogoča dva poizkusa ustnega, nakar je treba znova opravljati pisnega.

snov:

- osnovni komb probl
  podmn, komb, perm
- rodovne f-je
- formalne potenč vrste
- rekurz enačb
- Pólyeva teorija
- delno urejene množice

I. OSNOVNI PRINCIPI KOMBINATORIKE

1.1

[funkcija/preslikava]

$f: X \to Y$ je formalno množica parov,

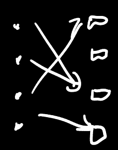
$f \subseteq X \times Y$ s pogojem

$\forall x \in X\ \exists!\ y \in Y: (x,y) \in f$

za vsak $x \in X$ je $f(x)$ enolično definiran.

funkcijo podamo:

1. naštejemo vse elemente f – vse pare
   puščični diagram



2. povemo predpis za preslikavo elementa
   $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $x \mapsto x^2$
3. z rekurzijo. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $f(0) = 1$
   $f(1) = 1$
   za $n \geq 2$ $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

(fibbonaccijevo zaporedje)

(neprazna) preslikava iz naravnih števil v katerokoli (neprazno) množico

pri tem predmetu velja

$\mathbb{N} := \mathbb{N}_0$

zdb $0 \in \mathbb{N}$

lastnosti preslikav:

- injektivnost: $\forall a,b: f(a) = f(b) \Rightarrow a=b$
- surjektivnost: $\forall a \exists b \ni: f(b) = a$
- bijektivnost: injektivnost in surjektivnost hkrati

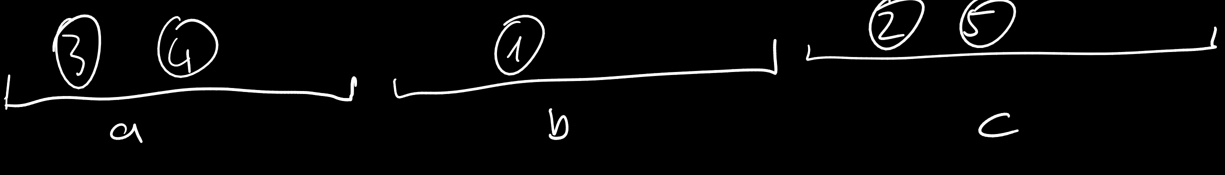
ZOB $\forall a \exists! b \ni: f(b) = a$

„kombinatorika je odkrivanje moči množic"

$f: X \to Y$:
$$f \text{ inj} \Rightarrow |X| \leq |Y|$$
$$f \text{ surj} \Rightarrow |Y| \leq |X|$$
$$f \text{ bij} \Rightarrow |X| = |Y|$$

V kombinatoriki često želimo dokazati enakost moči nekih dveh množic, najlepše s konstrukcijo bijekcije.

Imejmo n kroglic in k škatel. Vsako kroglico damo v eno od teh škatel.



Je preslikava $\{1..5\} \to \{a,b,c\}$
iz množice kroglic v množico škatel

inj: ni praznih škatel
surj: v vsaki škatli vsaj ena kroglica.

nekaj oznak v KOMB FMF:

- $\mathbb{N} := \{0, \dots, 1, 2, \dots\}$ ~ možne moči končnih množic
- $[n] := \{1 .. n\}$; $([0] = \emptyset, |[n]| = n)$
- množica podmnožic A (potenčna množica A) $=: 2^A$,

  velja $|2^A| = 2^{|A|}$, od tod ta oznaka.
- množica preslikav $X \to Y =: Y^X$, saj $|Y^X| = |Y|^{|X|}$

BINOMSKI IZREK:
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k} \binom{n}{k} x^k,$$

torej
$$\sum_{k} := \text{sum po vseh } k \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{k \geq a} := \text{sum po vseh } k \in \mathbb{N}, k \geq a$$

1.2.

[Dirichletovo načelo] angl. Pigeonhole principle

Če obstaja injekcija $X \to Y$, je $|X| \leq |Y|$.

torej če $|X| > |Y|$, ne obstaja injekcija $X \to Y$.

Če imamo n kroglic in k škatel in $n > k$, bosta gotovo vsaj v eni škatli vsaj dve kroglici.

UPORABA NAČELA:

- od trinajstih ljudeh imata vsaj dva rojstni dan v istem mesecu. kroglice so ljudje, škatle so meseci. preslikava je iz človeka v mesec rojstva.
- $X \subseteq \mathbb{N}$; $|X| = n+1$. deli $\exists\, x, y \in X$: $n \mid (x-y)$ in $x \neq y$

kvoglice so števila, škatle so možni ostanki pri deljenju z n

↳ število $0..(n-1)$

preslikava: $x \mapsto x \bmod n$

kvoglic: $n+1$ škatel: n $\Rightarrow$ dirichlet

- n ljudi. trdimo, da $\exists$ 2, ki poznata enako število ljudi.

n kvoglice: ljudje

n škatle: št. poznanstev ~ $\{0..(n-1)\}$

presl.: št. znancev

toda ne moremo hkrati imeti nekoga, ki pozna 0 in hkrati nekoga, ki pozna $n-1$

$\Rightarrow$ dirichlet

- let $X \subseteq \{1..1000\}$; $|X| = 10$

trdimo, da $\exists$ dve disjunktni podmn. X, ki imata enako vsoto

kvoglice: podmnožice X ~ $2^{10} = 1024$

škatle: možne vsote elementov ~ $\{55...955\}$

ali pa $\{1..1000\}$, če

vedno je $1024 > 1000$

gotovo $\exists$ dve podmn z isto vsoto. a sta nujno disjunktni:

če sta nedisjunktni jima odstranimo presek, vsota se ohrani in postaneta disjunktni.

• $X \subseteq \{1..2n\}$ $|X| = n+1$

trdimo, da $\exists x, x' \in X: x | x'$ in $x \neq x'$

kvoglice: X

škatle: liha števila v $[2n]$

~~takorotoli~~ število je $x = 2^a \cdot b$, kjer je b liho.

preslikava: $x \mapsto b$

kvoglic > škatel, torej

$\exists x, x'$ različna; $x = 2^a \cdot b$, $x' = 2^{a'} \cdot b$ če je $a < a'$, je $x' | x$, sicer $x | x'$

1.3

[Načelo vsote in produkta]

Načelo vsote. Let A, B disjunktni množici, tedaj $|A \cup B| = |A| + |B|$

sicer $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

splošneje: $A_1, \dots, A_n$ disjunktne, tedaj

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$$

načelo produkta: A, B množici. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

splošneje: let $A_1, \dots, A_n$ množice,

$$\left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$$

Interpretacija: elementi množice so tipa 1 ali 2, ne pa obeh, je skupno št. vsota št. el. tipa 1 in št. el. tipa 2.

Interpretacija: izberemo elem. iz A na toliko načinov kolikor je el., nato še izberemo NEODVISNO od prve izbire el. iz B. (itd.)

PRIMERI:

pravilo vsote

- oblačenje: Formalno ali neformalno.
  - Formalno: srajca 11, hlače 5 } prod
  - neformalno: majica 59, kavbojke 4 } prod.

možnih outfitov: $11\cdot 5 + 59\cdot 4 = 55+236 = 291$

- iščemo n-mestna števila, ki vsebujejo štirico in same različne števke.

varianta načela produkta – število možnih izbir ni odvisno od izbranega elementa.

$$\left.\begin{array}{ll} 4\,\_\,\_\,\_\,\_ & \}\ 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 \\ \_\,4\,\_\,\_\,\_ & \}\ 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 \end{array}\right\}\ \text{vsota}$$

...

$$\frac{9!}{(10-n)!} + (n-1)\frac{8!\cdot 8}{(10-n)!} \quad \text{možnih števil}$$

- figure pri šahu razporedimo po 1. vrsti

8 za lovca 1	}	$\frac{56}{2}$ → možnosti, ker sta lovca enaka
7 za lovca 2		
6 za konja 1	}	$\frac{30}{2}$
5 za konja 2		
4 top 1	}	$\frac{12}{2}$
3 top 2		
2 kraljica	}	2
1 kralj	}	1

$\xrightarrow{\Pi}$ 5040

- Fischerjev naključni šah ~ chess960
  - lovca na različnih barvah
  - kralj med trdnjavama (rošadi)

4 za lovca 1 } 8
4 za lovca 2

6 za konja 1 } $\frac{30}{2} = 15$
5 za konja 2

4 za kraljico } 4

1 za trdnjavi in kralja

$= 960$

- dokaži $|2^A| = 2^{|A|}$ za končno A.

najdi bijekcijo med $\{0,1\}^{|A|} \cong \{0..2^{|A|}-1\}$ in 2^A

Φ

$\Phi^{-1}(B) =$ iti bit poze, a je iti element A v $\Phi(B)$

$\{a_i \in A;\ B_i = 1\}$

bitstring

$\Phi(B) =$ bitstring, iti bit je $1 \Leftrightarrow$ iti elem. A v B.

$(a_1 \in B, a_2 \in B, \dots, a_n \in B)$

$\Phi^{-1} \circ \Phi = id$ in $\Phi \circ \Phi^{-1} = id$ ✓

očitno

v kombinatoriki pa stvari delamo bolj intuitivno.

za vsak el. se odločimo, a je v podmnožici ali ne.

2 izbiri za vsakega in izbire so neodvisne

$\Rightarrow 2^{|A|}$ (sicer isto kot bitstringi zgoraj).

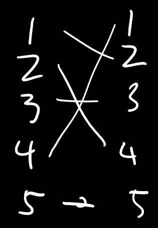
odmor

Bijekcija $X \to X$ je permutacija.

Množica permutacij X je S_X ali $S(X)$.

Množica permutacij $[n]$ je $S_{[n]}$ ali S_n.

let $n=5$:



$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

dvovrstična notacija

2 4 3 1 5 enovrstična notacija

tako je $|S_n| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots(n-(n-1)) = n!$

n fakulteta

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$

$8! = 40320$

$$n! = n(n-1)!$$

Stirlingova formula

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

asimptotsko enako

Zakaj:

- $n! = n(n-1)!$ želimo da velja za $n=1$
- $0! =$ prazen produkt
- $0! = |S_0| = |S_\emptyset| = |\{f : \emptyset \to \emptyset \text{ bijekcija}\}|$

$0! = 1 \Longleftarrow$ $f : \emptyset \to \emptyset$ preslikava edina

$f \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset \Rightarrow f = \{\}$ in na prazno izpolnjeno bijektivna.

Permutacije lahko medsebojno komponiramo.

Temu pravimo množenje.

* je isto kot $\circ$ v KOMB.

$$41325 \cdot 14352 = 42351$$

$(A, \circ)$ je grupa

- asociativnost: $(\pi \circ \rho) \circ \tau = \pi \circ (\rho \circ \tau)$
- enota: $\pi \cdot id = id \circ \pi = \pi$
- inverz: $\forall \pi \in A \; \exists \; \tau \in A \ni : \pi \circ \tau = \tau \circ \pi = id$

$$51432^{-1} = 25431$$