IRZV FRI 2024-12-11 (desete vaje)

1 Odločitveni problem

- Vhod: števila $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$, število $k \in \mathbb{Z}^+$
- Izhod: DA $\Leftrightarrow \exists I \subseteq \{1, \ldots n\} \ni: \sum_{i \in I} a_i = k$ (sicer NE)

1.1 Naloge

1. Naloga. Vhod: $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $k = 14$. Izhod je DA. Serializiramo kot $1^3 0 1^8 0 1^7 0 1^4 0 0 1^{14}$. 0 je delimiter in 00 je "konec" števil a_i.
2. Naloga: Vhod: $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $k = 16$. Izhod je NE. Serializiramo kot $1^3 0 1^8 0 1^7 0 1^4 0 0 1^{16}$.

Pretvorimo te serializirane nize v jezik. Niz je v jeziku, če predstavlja nalogo odločitvenega problema z izhodom DA. $1^3 0 1^8 0 1^7 0 1^4 0 0 1^{14} \in L$, $1^3 0 1^8 0 1^7 0 1^4 0 0 1^{16} \notin L$. L je torej jezik odločitvenih nalog.

Za ta jezik konstruirajmo Turingov stroj. Pri izdelavi stroja predpostavimo, da je vhodni jezik smiseln.

Turingov stroj Bo nedeterminističen. Poskusimo vse možne odločitve (podmnožice števil a_i) in preverimo, ali so naloge z izhodom DA.

- $T1 = 11101111111101111111011110011111111111111 = 1^3 0 1^8 0 1^7 0 1^4 0 0 1^{14}$ (vhod oz. začetno stanje traku)
- Na $T2$ prepišemo nekaj odločitev (nedeterministično in tokrat brez delimiterjev) in primerjamo ta trak z enicami po 00 v $T1$. Na primer $T2 = 11111111111111$ (vzamemo a_1, a_3 in a_4).

Predpis stroja:

- q_1 predstavlja stanje, ko bomo skopirali a_i na drugi trak, q_2 pa stanje, ko preskakujemo ta a_i.

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 1, B) &= \{(q_1, (1, R), (1, R)), (q_2, (1, R), (B, S))\} \\
\delta(q_1, 1, B) &= \{(q_1, (1, R), (1, R))\} \\
\delta(q_2, 1, B) &= \{(q_2, (1, R), (B, S))\} \\
\delta(q_1, 0, B) &= \{(q_0, (0, R), (B, S))\} \\
\delta(q_2, 0, B) &= \{(q_0, (0, R), (B, S))\} \\
\delta(q_0, 0, B) &= \{(q_3, (0, R), (B, L))\} \\
\delta(q_3, 1, 1) &= \{(q_3, (1, R), (1, L))\} \\
\delta(q_3, B, B) &= \{(q_F, (B, S), (B, S))\}
\end{aligned}
$$

2 Optimizacijski problem

- Vhod: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \exists i \in [n] \ni: a_i > 0$
- Izhod: $\max_{1 \le p \le q \le n} \sum_{i=p}^{q} a_i$.

2.1 Naloge

1. Naloga. Vhod: $a = (3, -4, 5, -3, 4, -1)$, Izhod: 6 $(5 + (-3) + 4 = 5)$

Kako bi optimizacijski problem pretvorili v odločitveni problem? Takole:

- Vhod: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $k \in \mathbb{Z}^+$.
- Izhod: DA $\Leftrightarrow \exists p, q, 1 \le p \le q \le n \ni: \sum_{i=p}^{q} a_i > k$.

Torej ali je vsota večja od k.

Kako serializiramo nalogo?

- Naloga: $A = (3, -4, 5, -3, 4, -1)$,$k = 5$ serializiramo kot $1^3001^401^5001^301^4001^10001^5$ (končni terminator je 000, delimiter je 0, vsako negativno številko prefiksamo z 0).

$$\begin{array}{ccccccc} & 3 & -4 & 5 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 2 & 6 & 5 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Algoritem: Tekoče vsote.

Turingov stroj

- $T1$: 1110011110111110011101111100100011111
- $T2$: 0111, $\leftarrow\leftarrow\leftarrow$ S, 111, 11, $\leftarrow\leftarrow\leftarrow$, 1111, $\leftarrow$

Opis: označimo si levi rob traku $T2$ z 0, nato potujemo desno po $T1$, za vsako pozitivno številko dodamo toliko enic na $T2$, za vsako negativno pa se premaknemo levo na traku za toliko, nikoli bolj levo od označbe za levi rob traku. Na koncu $T1$ primerjamo, ali je na traku več enic kot za 000 na $T1$.

- $\delta(q_0, x \in \{1, 0\}, B) = (q_1, (x, S), (0, R))$ Označimo si levi rob.
- $\delta(q_1, 1, \{B, 1\}) = (q_{3+}, (1, B), (1, R))$ oz. $\delta(q_1, 1, 0) = (q_{3+}, (1, B), (0, R))$
- $\delta(q_1, 0, x \in \{B, 1, 0\}) = (q_2, (0, R), (x, S))$
- $\delta(q_2, 1, x \in \{B, 1\}) = (q_{3-}, (1, B), (x, L))$ oz. $\delta(q_2, 1, 0) = (q_{3-}, (1, B), (0, S))$ Začetek negativnega števila.

- $\delta(q_{3+}, 1, \{B, 1\}) = (q_{3+}, (1, R), (1, R))$ Pišemo enice na drugi trak in se pomikamo desno.
- $\delta(q_{3+}, 0, x \in \{B, 1\}) = (q_1, (0, R), (x, S))$ Konec številke a_i.
- $\delta(q_{3-}, 1, 1) = (q_{3-}, (1, R), (1, L))$, $\delta(q_{3-}, 1, 0) = (q_{3-}, (0, S), (1, L))$ Pomikamo se na levo oz. stallamo, če smo na levem robu $T2$.
- $\delta(q_{3-}, 0, x \in \{1, 0\}) = (q_1, (0, R), (x, S))$
- $\delta(q_2, 0, x \in \{B, 1\}) = (q_4, (0, R), (x, L))$ oz. $\delta(q_2, 0, 0) = (q_5, (0, R), (x, R))$ Prebrali smo terminator 000.
- $\delta(q_4, 1, 1) = (q_4, (1, S), (1, L))$ Pomikamo se levo na $T2$.
- $\delta(q_5, 1, 1) = (q_5, (1, R), (1, R))$ Primerjamo dolžini (pomikamo se desno na obeh).
- $\delta(q_5, B, 1) = (q_F, (B, S), (1, S))$

D. N.: simuliraj ta stroj za nek primer in najdi alternativne manjše rešitve.

3 Serializacija/jezik Turingovih strojev

Definicija. Naj bo $L_\varepsilon = \{\langle M \rangle ; L(M) = \emptyset\}$ ... jezik Turingovih strojev, ki sprejmejo prazen jezik.

Kodirali bomo enotračne deterministične stroje. Njihova stanja: q_1 začetno, q_2 edino končno, $q_i, i \geq 3$ ostala stanja. Tračna abeceda: $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = B, X_4, \ldots$ Smer premika: $D_1 = L, D_2 = R$. Prehod $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ zakodiramo/serializiramo kot $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$. $c_1, \ldots, c_n$ so serializacije prehodov $c_1 11 c_2 11 \ldots c_{n-1} 11 c_n$.

Definicija. Univerzalni Turingov stroj je stroj, ki sprejme opis stroja M z dodano besedo w in vrne DA, če $w \in L(M)$. Par (M, w) (vhod) je serializiran kot $c_M 111 w$.

Vaja. Turingov stroj za 1^+0^+ in napiši njegovo serializacijo/kodo.

- $\delta(q_1, 1) = (q_3, 1, R)$, $c_1 = 0100100010100$
- $\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, R)$, $c_2 = 0001001000100100$
- $\delta(q_3, 0) = (q_4, 0, R)$, $c_3 = 000101000010100$
- $\delta(q_4, 0) = (q_4, 0, R)$, $c_4 = 0000101000010100$
- $\delta(q_4, B) = (q_2, B, L)$, $c_5 = 00001000100100010$

Koda/serializacija: $c_1 11 c_2 11 c_3 11 c_4 11 c_5 11$.

Definicija. Če niz ne predstavlja veljavnega Turingovega stroja po sedanji definiciji, definirajmo, da opiše stroj s praznim jezikom.

Potemtakem $c_1 11 c_2 11 c_3 11 c_4 11 c_5 11$ od prej $\notin L_\varepsilon$