IPMUFMF 2025-09-11

[kvocientni kolobarji]

imejmo $K$ kolobar in $I \trianglelefteq K$. potem lahko tvorimo kvoc. kolob. $L = K/I$. elementi so ekv. razredi

$$L = \{ x + I \,;\, x \in K \}$$

operacije: $(x+I)(y+I) := (x+y)+I$

$(x+I)(y+I) := xy + I$

primera:

- $\mathbb{Z}/(2) = \mathbb{Z}_2$ $\quad 7+(2) = 6+1+(2) = 3\cdot 2+1+(2) =$ $= 1 + 3\cdot 2 + (2) = 1+(2)$
- $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$
- $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[x]/(x^2)$

---

N. opiši kvocientna kolobarja

- $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3)$
- $\mathbb{Q}[x]/(x^2-3)$

opisali bomo predstavnike ter na njih opisali operaciji $+$ in $\cdot$.

elementi oblike $p(x)+(x^2-3)$.

poskusimo izbrati $p(x)$ tako, da je čim manjše stopnje. Če uporabimo izrek o deljenju, lahko $p(x)$ pišemo kot $p(x) = (x^2-3)k(x) + r(x)$, $\deg r(x) \leq 2$.

$r(x) + I = p(x) + I$, torej lahko vsak el. predstavimo s polinomom stopnje 1/0.

$$\mathbb{Z}[x]/(x^2-3) = \{(\underbrace{ax+b}_{\text{kanonični predstavnik}}) + I \,;\, a,b \in \mathbb{Z}\}$$

$$((a_1x+b_1)+I) + ((a_2x+b_2)+I) =$$

$$= (((a_1+a_2)x + b_1+b_2) + I)$$

$$((a_1x+b_1)+I) \cdot ((a_2x+b_2)+I) =$$

$$= ((a_1a_2x^2 + a_1b_2x + b_1a_2x + b_1b_2) + I) =$$

$$= ((a_1a_2x^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)x + b_1b_2) + I) =$$

$$= ((a_1a_2x^2 + (a_1b_2+b_1a_2)x + b_1b_2) - a_1a_2(x^2-3) + I) =$$

$$= (((a_1b_2+b_1a_2)x + b_1b_2 + 3a_1a_2) + I)$$

za drugi kolobar enako.

$$x^2 + I = 3 + I \Leftrightarrow x^2 - 3 \in I$$

<u>Opomba:</u> kolobarja zgornja predstaviti še drugače:

vpeljimo $K = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (kot množica) + operacijama:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$$
$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1\cdot a_2 + a_1 b_2, 3b_1b_2 + b_1 a_2)$$

$(K, \oplus, \odot)$ je kolobar in velja

$$\left(\mathbb{Z}[x]/_{(x^2-3)}\ ; +, \cdot\right) \cong (K, \oplus, \odot).$$

enako strukturo ima tudi kolobar

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a\sqrt{3}+b;\ a, b\in\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$$

glede na običajni operaciji + in ·.

$$(a_1\sqrt{3}+b_1)+(a_2\sqrt{3}+b_2) = (a_1+a_2)\sqrt{3} + b_1+b_2$$
$$(a_1\sqrt{3}+b_1)(a_2\sqrt{3}+b_2) = 3a_1a_2 + b_1b_2 + \sqrt{3}(a_1b_2 + b_1a_2).$$

<u>Opomba:</u> izrek s predavanj: če je $R$ komut. kolobar in $I \triangleleft R$ maksimalen ideal, je $R/I$ obseg.

v našem primeru:

$$\mathbb{Q}[x]/_{(x^2-3)} \cong \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \qquad \left(\begin{array}{l}\text{kasneje}\\ = \mathbb{Q}(\sqrt{3})\end{array}\right)$$

je obseg

toda $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3) \overset{\sim}{=} \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ $(\neq \mathbb{Z}(x))$ idk, ne razumem.

Primer: $(2, x^2-3)$ je ideal, ki ni enak $(x^2-3)$:

$$(x^2-3) \subset (2, x^2-3) \subset \mathbb{Z}[x]$$

$$(2, x^2-3) = \{2p(x) + (x^2-3)q(x) \ ; \ p, q \in \mathbb{Z}[x]\}$$

upr. $2 \in J$ i $1 \notin J$.

---

N: Zapiši tabeli za seštevanje in množenje v konč. kolobarju $K = \mathbb{Z}[i]/(2)$

...

---

N: Ideal $P \triangleleft K$ je praideal $\iff K/P$ je cel kolobar.

dokaži.

Def.: $P \overset{\neq K}{\triangleleft} K$ je praideal $\iff \forall a, b \in K: ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P$

Dokaz: $(\Rightarrow)$ privzemimo $P \leq K$ praideal. Ker $(a+P)(b+P) = (0+P)$.

$$(ab+P) = (P) \iff ab \in P$$

$$\Rightarrow a+P = P \vee b+P = P$$

$(\Leftarrow)$ privzemimo $P/K$ cel.

$P$ praideal. Ker $ab \in P \iff ab + P = P =$

$= (a+P)(b+P) = P \Rightarrow a+P = P \vee b+P = P$

$a \in P \vee b \in P$