IPMPFMF 2025-05-20

$f^{\text{zvezna}}: X \to Y$

$A \subseteq X$ kompakten $\Rightarrow f_*(A)$ kompakten

<u>Dokaz:</u> Naj $\mathcal{U}$ odprto pokritje za $f_*(A)$

Naj $\{f^*(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ odp. pokr. za A

$\Rightarrow f^*(U_1), \ldots, f^*(U_n)$ je odprto podpokritje za A,

$\Rightarrow U_1, \ldots, U_n$ je odprto podpokritje za $f_*(A)$

$\square$

<u>Posledica:</u> Če je $f^{\text{zv}}: X^{\text{komp}} \longrightarrow \mathbb{R}$, potem f zavzame min in max.

(torej ni le omejena, temveč tudi doseže inf in sup)

<u>Dokaz:</u> $f_*(X)$ je komp. $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$

$f_*(X)$ je zaprt in omejen $\Rightarrow f_*(X)$ ima inf in sup

in ker je zaprta, ju doseže. $\square$

Trditev (Cantorjev izrek / princip sendviča):

Naj $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ padajoče zaporedje zaprtih nepraznih podprostorov v kompaktnem X. Tedaj je $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

Dodatno, če je X metrizen in je $\lim_{i \to \infty} \operatorname{diam} F_i = 0$, potem je v preseku natanko ena točka.

($[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots$ če $\lim_{i \to \infty} (b_i - a_i) = 0 \Rightarrow$ v preseku je natanko ena točka)

Def.: let (X,d) metričen in $A \subseteq X$. premer množice A je
$\operatorname{diam} A := \sup_{a,a' \in A} d(a,a')$

Dokaz: PODRAA $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ $\ni$ $\bigcap_i F_i = \emptyset$ in F_i zaprte.

$\underbrace{X - F_1 \subseteq X - F_2 \subseteq X - F_3 \subseteq \dots}$ $\qquad \bigcup_i (X - F_i) = X$

naraščajoče zap. odprtih

$$\Rightarrow \quad X - F_1, \dots, X - F_n = X$$

$\Rightarrow$ F_n je prazna.

$\Rightarrow$ $F_i = \emptyset \quad \forall i \geq n$

$\square$

[Povezanost] **Def.**

Prostor X je nepovezan, tedaj ga lahko razcepimo na disjunktno unijo dveh nepraznih odprtih podmnožic.

$X = A \cup B$, A, B odprti, neprazni, disjunktni.

Prostor X je povezan, tedaj ni nepovezan.

Primeri:
- X s trivialno topologijo je povezan.
- X z eno samo točko je povezan
- $\mathbb{Q}$ z evklidsko topologijo so nepovezana,
  npr. : $\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

Trditev: NTSE:

a.) X povezan

b.) X ne moremo zapisati kot disjunktno unijo dveh nepraznih zaprtih množic

c.) $\emptyset$ in X sta edini odprto-zaprti množici

d.) $\nexists$ zvezna surjekcija $f: X \to \{0,1\}$

Dokaz: $X = A + B$ ← odisjunktna unija

za a, b odprti, neprazni

A in B sta drug drugi komplement, torej sta obe tudi zaprti. $\Rightarrow$ A, B odprto-zaprti.

če takih ni, ni razcepov

s tem smo dokazali $a \Leftrightarrow b$, $\Leftrightarrow c$.

d.): Če imamo razcep $X = A + B$, odp. nepraz.

$f: X \to \{0,1\}$ ← z metriko $d(a,b) = \begin{cases} 0; & a = b \\ 1; & a \neq b \end{cases}$

elem iz $A \mapsto 0$, $B \mapsto 1$

obratno, če obstaja $f^{\text{zv, sur}}: X \to \{0,1\}$, je razcep $f^*(0)$, $f^*(1)$.

Izrek: Povezane podmnožice $\mathbb{R}$ so natanko intervali.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj $A \subseteq \mathbb{R}$ ni interval. $\Rightarrow$ $\exists\, a < b \leq c$: $a, c \in A$, $b \notin A$

$\Rightarrow$ $(-\infty, b) \cap A$, $(b, \infty) \cap A$ je netrivialni odprt razcep

$\Rightarrow$ A ni povezana.

($\Leftarrow$) Let I interval. PDDRAA ni povezan $\Longrightarrow$ $\exists$ zaprt razcep $I = A + B$ zaprti, neprazni. Vzemimo $a \in A$, $b \in B$.
BŠŠ $a < b$.

$$c := \sup\{x;\ [a,x] \subseteq A\}$$

A zaprta $\Rightarrow c \in A$
A odprta $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ni: [c, c+\varepsilon) \subseteq A$

$$\Rightarrow [a, c+\tfrac{\varepsilon}{2}] \subseteq A \quad \times$$

c ni sup.

<u>Trditev:</u> $[a,b) \not\cong (a,b)$

<u>Dokaz:</u> PDDRAA $\exists$ homeomorfizem

$f: [0,1) \to (0,1) \Rightarrow$

$$f|_{(0,1)}: (0,1) \longrightarrow (0,1) \setminus \{f(0)\}$$

je tudi homeomorfizem $\times$, ker bi to bil homeomorfizem med povezanim in nepovezanim prostorom.

<u>Trditev:</u> zvezna slika povezane množice je povezana.

Dokaz: $X^{pov} \xrightarrow[f^{zv,surj}]{} Y$

Y pov. PDDRAA, torej bi obstajala zvezna surjekcija v $\{0,1\}$. Recimo ji g.

tedaj bi bil $g \circ f$ zvezna surjekcija iz X v $\{0,1\}$ ~~X~~ z X^{pov}.

Trditev: a.) Let X_λ povezane, $\bigcap_\lambda X_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_\lambda X_\lambda$ je povezana.

b.) Let X, Y pov $\Rightarrow X \times Y$ pov.

c.) Let A pov. in $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ (zaprtje) $\Rightarrow B$ pov.

Dokaz: a, b za D.N.

c.): Let $f^{zv.}: B \to \{0,1\}$. trdimo, da f ni surjektivna.

$f|_A : A \to \{0,1\}$ ni surjekcija, denimo $f_*(A) = 0$

$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \{0\} \Rightarrow f$ ni surjektivna $\square$

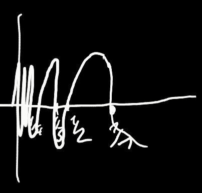
Def.: X je povezan s potmi, če za poljubni $x_0, x_1 \in X$ obstaja pot $f^{zv}: [0,1] \to X$ in $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$.

Trditev: če je X povezan s potmi, je povezan.

Dokaz: očitno iz prejšnjih dveh trditev.

V $\mathbb{R}$ so podmnožice povezane natanko takrat, ko so povezane s potmi.

Primer: $f(x) = \sin\frac{\pi}{x} : (0,1) \to [0,1]$



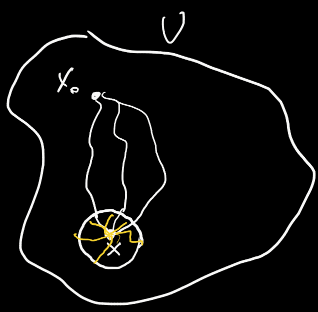
$\overline{\Gamma}$:= zaprtje te krivulje je povezana, a ne s potmi. ni poti od 1 do 0

<u>Trditev:</u> Če je U odprta $\subseteq \mathbb{R}^n$, potem je

U povezana $\Leftrightarrow$ U povezana s potmi.

<u>Dokaz:</u> $(\Leftarrow)$ ✓

$(\Rightarrow)$ Let $x_0 \in U$. $A := \{x \in U ; \exists$ pot v U od x_0 do $x\}$



A je odprta.

tudi A^c je odprta $\rightarrow$ če ne moreš priti do $a \in A^c$, ne moreš priti niti do $K(a, \varepsilon)$

$\Rightarrow A$ odp. & zap.

ker A povezana $\Rightarrow$ $A = U$ ali $\emptyset$ $\Rightarrow A = U$