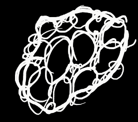
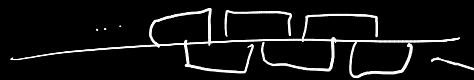
IPMPFMF 2025-05-13

kadar ugotavljamo, da dva prostora nista homeomorfna, iščemo topološko lastnost, ki jima ni skupna.

[kompaktnost]

Def: (X,T). $U \subseteq T$ je (odprto) pokritje $A \subseteq X$, če je unija elementov U cel A. Podpokritje U je $U' \subseteq U$, ki je tudi pokritje.

Def: $A \subseteq X$ je kompaktna, če za vsako odprto pokritje A obstaja končno podpokritje 

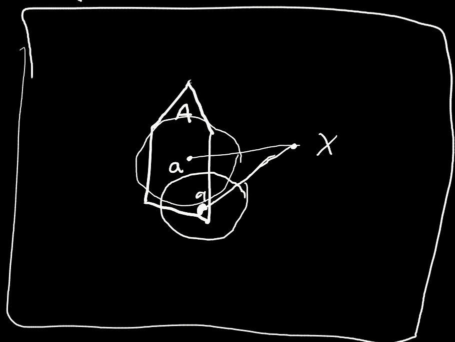
Primeri:
- Vsaka končna množica je kompaktna.
- $\{x_i\}$ $\lim_{n\to\infty} x_i = x$. tedaj $\{x_i;\ i\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ je kompaktna.
  ↳ pokrijemo limito. nato ostane le še končno mnogo točk, ki jih pokrijemo s končno množicami)
- $\mathbb{R}$ ni kompakten. 

Trditev: V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica omejena.

Dokaz: $K(x,1) \subseteq K(x,2) \subseteq K(x,3) \subseteq \dots$ so odprte množice, ki pokrivajo A (za $x\in A$). Če A komp., je vsebovan v največji iz tega končnega podpokritja in zato omejen.

Trditev: V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica zaprta. podrobno

Dokaz: Naj A kompaktna. Vzemimo $x \notin A$ $(x \in A^c)$.



$\{K(a, \frac{d(a,x)}{2}) \mid \forall a \in A\}$ je odprto pokritje A.

obstajajo $K(a_1, \frac{d(a_1,x)}{2}), \ldots, K(a_n, \frac{d(a_n,x)}{2})$, ki tvorijo končno odprto pokritje (ker A kompakten)

vzemimo $r := \min_{i \in [n]} \{\frac{d(a_i,x)}{2}\}$. $K(x,r)$ ne seka A.

torej je A^C odprta $\Rightarrow$ A zaprta. $\square$

$\Rightarrow$ V metričnem prostoru je vsaka kompaktna množica zaprta in omejena.

V $\mathbb{R}^n$ velja ekvivalenca.

Izrek: $[a,b]$ je kompakten.

Dokaz: Naj U odprto pokritje $[a,b]$, sestavljeno iz samih odprtih intervalov.

označimo si $Z := \{x \in [a,b] ; [a,x]$ je pokrit s končno elementi $U\}$

Naj $c := \sup Z$.

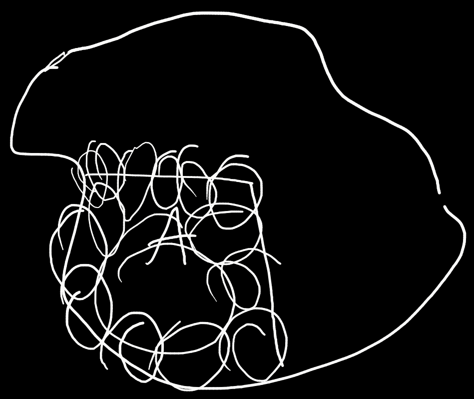
$[a,c]$ ima končno pokritje z elementi U.

Ker je c pokrit z množico v U, ta množica vsebuje nek $x \in [a,c)$. Torej $[a,c]$ ima končno pokritje z elem U.

$c = b$: če bi c ne bil b, bi imeli nek $q > c$ $\ni$: $[a,q]$ ima končno pokritje, kar je v $*$ z definicijo c (supremum).

Trditev: zaprta podmnožica kompakta je kompakt

Dokaz: $A^{zap} \subseteq X^{kompakt} \implies$ A kompakt



Vzemimo odprto pokritje U za A. $U \cup \{X - A\}$ je odprto pokritje za X. Ker je X kompakt obstaja končno podpokritje. Prav to, brez $\{X-A\}$, pa je končno podpokritje U za A.

Posledica: $A \subseteq \mathbb{R}$ je komp $\iff$ A zap. in omej.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ A omejena $\Rightarrow$ vsebovana v $[a,b]^{komp}$

zaprta podmnožica kompakta $[a,b]$ je kompaktna.

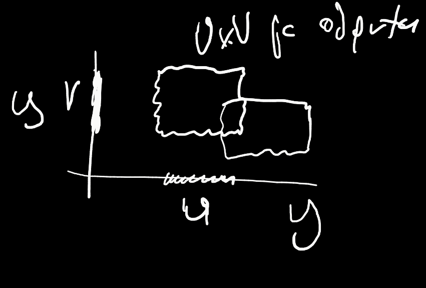
Sedaj je cilj dokazati, da A kompaktna $\iff$ A zaprta in A omejena. v $\mathbb{R}^n$.

Potrebujemo izrek!

Izrek: X, Y kompaktni $\Rightarrow X \times Y$ kompaktni

Pred dokazom je treba definirati produktno topologijo

(X, T_X), (Y, T_Y), $X \times Y$. Kaj naj bo topologija na $X \times Y$?



Topologija na $X \times Y$ naj vsebuje produkte odprtih množic iz X in Y -- škatlaste odprte množice.

a to ni dovolj

$\mathcal{T}_{X\times Y} := \{$ vse možne unije škatlastih $X \times Y$ odprtih množic. $\}$ -- zapiranje za unije

$$\left(\bigcup_\lambda U_\lambda \times V_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_\mu U_\mu \times V_\mu\right) = \bigcup_{\lambda,\mu} \underbrace{(U_\lambda \times V_\lambda) \cap (U_\mu \times V_\mu)}_{\text{škatla}}$$

je topologija nad $X \times Y$.

temu pravimo produktna topologija.

$\cancel{\mathcal{T}} / X \times Y$

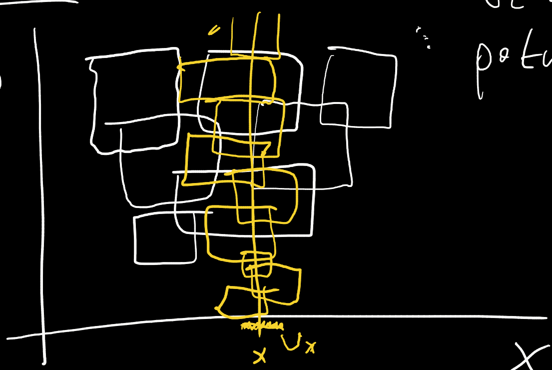
Velja: $f: Z \to X \times Y$ $\quad f = (f_1, f_2)$

f zvezna $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 zvezni

Dokaz DN.

Dokaz izreka:

X, Y komp.



Škatle pokrivajo cel prostor.

$\mathcal{U}$ odp. pokritje za $X \times Y$ s škatlami

za poljuben $x \in X$ si ogledmo $\{x\} \times Y$. ta je kompakten in pokrit z $\mathcal{U}$. obstaja končno podpokritje $\mathcal{U}$:

$U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ in sekajo $\{x\} \times Y$

$U_x := U_1 \cap \dots \cap U_n$ je odprta množica.

$\Rightarrow$ pokriva $U_x \times Y$.

$\{U_x ; x \in X\}$ je odp pokritje za $X \Rightarrow \exists$ končno podpok.

$U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$

$U_{x_i} \times Y$ ima končno podpokr. iz $\mathcal{U}$

$\Rightarrow$ $X \times Y$ ima končno podpok. iz $\mathcal{U}$.

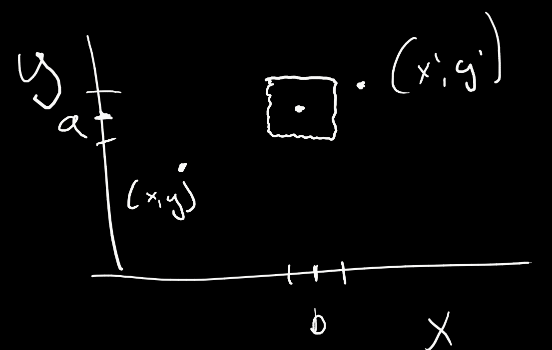
$\square$

Posplošitev tega izreka je izrek Tihonova:
poljuben produkt kompaktov je kompakt.
↳ poljubne kardinalnosti.

Vprašanje: zakaj je produktna topologija ista kot navadna topologija $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Primer: (X, T_X) določena z metriko d_X

(Y, T_Y) -||- d_Y



$d_{X \times Y}((x,y),(x',y')) := \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$

in tiste tri glavne metrike določajo ekvivalentne topologije.

Izrek (Heine-Borel-Lebesgov izrek):

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna $\Leftrightarrow$ A zaprta $\wedge$ A omejena

Dokaz: $(\Rightarrow)$ $\mathbb{R}^n$ metričen $\Rightarrow$ kompakti so zaprti in omejeni:

$(\Leftarrow)$ A omejena $\Rightarrow$ je vsebovana v nekem produktu zaprtih intervalov, kar je kompakt

zaprta podmn. kompakta je kompakt.

Izrek (Bolzano-Weierstraß): vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}$ ima konvergentno podzaporedje.

Lema: V kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica stekališče.

Dokaz leme: naj bo A brez stekališča v kompaktnem X. $\forall x \in X$ $\exists$ okolica U_x, ki vsebuje le končno elementov A.

$\{U_x ; x \in X\}$ ima končno podpokritje

$U_1, \dots, U_n \Rightarrow A$ je končna ✗

$\downarrow$ končno $\quad \downarrow$ končno

konec leme.

Dokaz izreka:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je omejeno $\Rightarrow$ leži v kompaktu.

case $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ končna:

vsaj en x_i se pojavi ∞ krat.

to je stekališče.

in tudi podzaporedje s samo tem el. konvergira

sicer: uporabimo lemo.