

zveznost

$f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \cdot f^*: \mathcal{T}_Y \rightarrow \mathcal{T}_X \\ & \quad \downarrow \psi \\ & f^*(V) \in \mathcal{T}_X \end{aligned}$$

prejšnjo pokazali ucinimo, da je konstanta vselej zvezna.

izrek: NTSE

(1) $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna

(preslikava vsake odpr. množice je odprta)

(2) preslikava vsake zaprte množice je zaprta

(3) $\forall A \subseteq X: f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$ $\rightarrow$ zaprtje $\sim$ ($\mathcal{L}(Z) = \overline{Z}$)

Notas:

(1) $\Rightarrow$ (2): $\forall B: \underbrace{Y-B}_{\text{odprta}} \in \mathcal{T}_Y \xrightarrow{\text{komplement } B} X - f^*(B) \in \mathcal{T}_X$ $\leftrightarrow$ B zaprta

velja, ker $f^*(Y-B) = X - f^*(B)$

(2) $\Rightarrow$ (1): podobno

(2) $\Leftrightarrow$ (3):

za $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup & & \cup \\ A & & B \end{array}$

velja $f^*(f_*(A)) \supseteq A$ $\uparrow$ = za inj
 $f_*(f^*(B)) \subseteq B$ $\downarrow$ = surj

$(\Rightarrow) \quad f_*(A) \subseteq \overline{f_*(A)}$

$A \subseteq f^*(f_*(A)) \subseteq f^*(\overline{f_*(A)})$

$\subseteq \overline{A} \subseteq$

zaprtje, ker je preslikava zaprta (predpostavka (2))

$$f^*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(f^*(\overline{A}))} \subseteq \overline{f_*(A)}$$

$$\Rightarrow f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$$

($\Leftarrow$) Vzemimo $B^{\text{zaprta}} \subseteq Y$, zober $B = \overline{B}$.

trdimo $f^*(B)$ je zaprti.

$$\text{velja } f_*(\overline{f^*(B)}) \underset{(3)}{\subseteq} \overline{f_*(f^*(B))} \subseteq \overline{B} = B$$

$$\overline{f^*(B)} \subseteq f^*(\overline{f_*(f^*(B))}) \subseteq f^*(B)$$

ker velja velja $\overline{Z} \subseteq \overline{Z}$, sledi:

$$\overline{f^*(B)} = f^*(B)$$

$\Rightarrow f^*(B)$ zaprti $\square$

iz analize:

če za vsoto točko x velja, da
za vsoto zaporedja, ki konvergira k x
velja, da s f preslikani členi
konvergirajo k $f(x)$, je f zvezna.

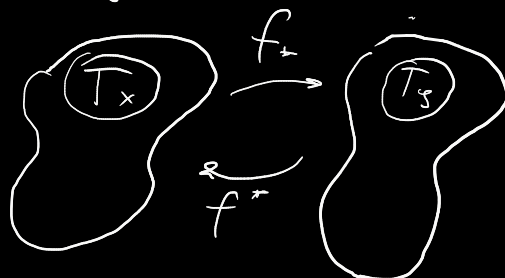
to pa je analog točke (3) izleto.

[zovortizem topologij]

zveznost:

$$f = (x, T_x) \rightarrow (y, T_y)$$

$$T_x \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xleftarrow{f^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_*} \mathbb{R}^n \supseteq T_y$$



Def: T je **homeomorfizem**, če je f bijektivna in inducira bijektivni med T_x in T_y .

Trditve: $f: (X, T_x) \rightarrow (Y, T_y)$ je homeomorfizem $\Leftrightarrow$ f bijektivna ter f in f^{-1} sta zvezni.

□

Oznaka: $(X, T_x) \approx (Y, T_y)$ pomeni, da sta topološka prostora homeomorfn.

$$X \approx Y$$

$$X \xrightarrow[\approx]{f} Y \rightarrow Y \xrightarrow[\approx]{f^{-1}} X$$

$$X \xrightarrow{f \approx} Y \xrightarrow{g \approx} Z$$

Primeri standardnih homeomorfizmov:

• $[a, b] \approx [c, d]$ za $a < b$ in $c < d$

$$\text{definj: } [0, 1] \xrightarrow{f} [a, b]$$

$$f(x) = a + (b-a) \cdot x$$

→ če ne specificiramo topologije, impliciramo običajno evklidsko topologijo.

ista formula za odprte in polodrupe intervale.

$$(0, 1] \approx [0, 1) \approx [a, b)$$

polodrupe
odprti
zaprti vsi končni intervali so homeomorfni med seboj.
Je več, tudi neskončni, to uporabimo tukaj
z avtoru, no, bolj običajna rešila kot a-tan
bi bila $(-1, 1) \xrightleftharpoons[f]{\phi} \mathbb{R}$:

$$f(x) = g^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

$$g(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad (\text{un primer})$$

amput niso pu poloduxi homeomorfii zapuxim
uacimo — tuife nazuxedi.

[Topoloxa lastuxot]

~ je lastuxot, ti se oluxufu pu homeomorfizmi.
~ je $x \sim y$, uelfu $L(x) \Leftrightarrow L(y)$ za lastuxot L .

Primeri:

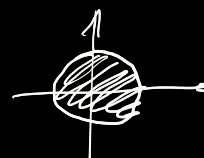
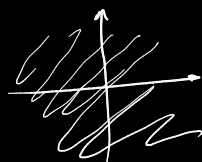
- kompaktnost
- kardinalnost
- omejeuxot

STA topoloxa lastuxot
NI topoloxa lastuxot

Std. homeomorfizem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1+|\vec{x}|}$$



$$\mathbb{R}^n \rightarrow B^n := K(\vec{0}, 1)$$

↓
kugla

stuxita problem
uac tuxglo z
tuxzuxu bifurkuxo.

a je homeomorfizem? DA.

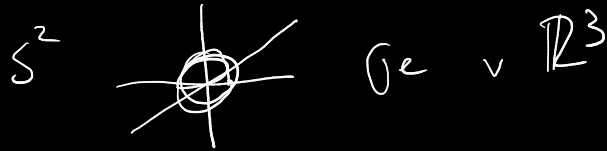
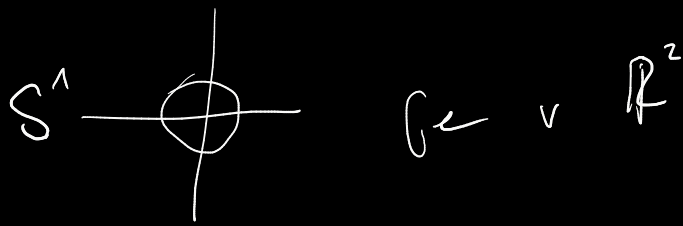
$$f^{-1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1-|\vec{x}|}, \text{ ti sluxa iz lxtoufer, lxtoufux od } 1$$

$$B^n := \{x^n \in \mathbb{R}^n; |\vec{x}| < 1\}$$

$$\overline{B^n} = \{x^n \in \mathbb{R}^n; |\vec{x}| \leq 1\}$$

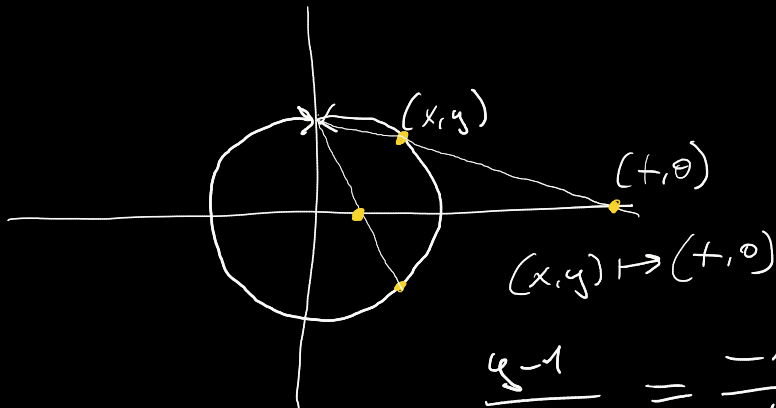
$$S^{n-1} = \{x^n \in \mathbb{R}^n; |\vec{x}| = 1\}$$

→ zatiq $n-1$? ker se sfera namo
 dimenzijsta kot piramida tragan.



$$\{e_1, e_2\} = S^0 \text{ --- } Ge \text{ v } \mathbb{R}.$$

potakimo, da Ge $S^1 - \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}$.



$$\frac{y-1}{x} = \frac{-1}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{1-y}$$

$$f: S^1 - \{(0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$$

inverz:

$$\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) \leftarrow t$$

poljubnih dimenzij

$$\left(\frac{2\vec{x}}{|\vec{x}|^2+1}, \frac{|\vec{x}|^2-1}{|\vec{x}|^2+1} \right) \leftarrow \vec{x}$$

$$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$S^n = \{ (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n \text{ ničel}}, 1) \} \iff \mathbb{R}^n$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(\vec{x}, y)}_{\substack{\uparrow \mathbb{R}^n \\ \uparrow \mathbb{R}}} \mapsto \frac{\vec{x}}{1-y}$$

