IPMPFMF 2025-04-15

POGLAVJE [TOPOLOGIJA]

Zvezna deformacija.

najprej si oglejmo zveznost fje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in$

Def.: f zvezna v $x \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni: \forall a \in \mathbb{R}: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

alt Def: f zvezna v $x \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}: \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

kaj pa zveznost na več dimenzijah?

$\left(f: (x,y) \mapsto (x+y, x-y, x^2)\right)$ npr.

$f: X \longrightarrow Y$

definiramo razdaljo/metriko na X in Y:

$d_X: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

veljati mora:

SIMETRIČNOST • $d(x,y) = 0 \iff x = y$

DEFINITNOST • $d(x,y) = d(y,x)$

TRIKOTNIŠKA NEENAKOST • $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Def.: metrika na X je fja $d: X \times X \longrightarrow [0,\infty)$, k ustreza tem pogojem.

Primeri: • $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |y-x|$.

• $\mathbb{R}^2$: $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ EVKLIDSKA

$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$ MANHATTANSKA / NEW YORŠKA

· $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_2-y_1|\}$

· X poljubna množica: $d_{\text{diskretna}}(x,y) = \begin{cases} 0; & x=y \\ 1; & x\neq y \end{cases}$

<u>Def.</u>: let $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$. f je zvezna na $x\in X \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall a\in X: d_X(x,a)<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon$

*

odprtost:

<u>Def.</u>: $U\subseteq\mathbb{R}^2$ je odprta $\iff \forall x\in U\ \exists \varepsilon>0 \ni: K(x,\varepsilon)\subseteq U$

notranja tč.:

$A\subseteq\mathbb{R}^n$: $x\in\mathbb{R}^n$ je notranja za A, če $\exists\varepsilon>0 \ni: K(x,\varepsilon)\subseteq A$

$x\in\mathbb{R}^n$ je zunanja za A, če $\exists\varepsilon>0 \ni: K(x,\varepsilon)\cap A=\emptyset$

mejne točke so take, ki niso niti notranje niti zunanje.

x je mejna, če $\forall\varepsilon>0: K(x,\varepsilon)$ seka A in A^c.

A je odprta, če so vse njene tč. notranje.

zveznost (*) pomeni, da

če so vse točke $U\subseteq Y$ notranje, so tudi vse $f^{-1}(U)$ notranje.

trditev: $U\subseteq Y$ odprta $\Rightarrow f^{-1}(U)\subseteq X$ odprta

f je zvezna $\Leftrightarrow$ praslika vsake odprte množice je odprta.

<u>Definicija:</u> let X poljubna množica. Topološka struktura (krajše topologija) je podana z družino podmnožic $T \subseteq 2^X$, ki jim pravimo odprte množice in ki zadoščajo pogojem:

(1) poljubna unija elementov T je element T *

(2) končen presek elementov T je element T. **

---

* implicira $\emptyset \in T$
** implicira $X \in T$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ je zaprta, če je A^c odprta.

let $Z := \{A \subseteq X;\ A^c \in T\}$

$A \subset T$

Def zaprtih: (X, T) top. prostor. $A \subseteq X$ je zaprta, če $A^c \in T$. Potem za družino zaprtih množic velja

(1) poljuben presek zaprtih je zaprt.

(2) končna unija zaprtih je zaprta.

<u>Primeri:</u>

- odprte množice v $\mathbb{R}^n$ ustrezajo definiciji topologije
- $\{\emptyset, X\}$ je najm. možna topologija na X.
  $\hookrightarrow$ trivialna topologija

- 2^X je najv. močna topologija na X.
  ↳ diskretna topologija