PMPFMF 2025-03-11

Definicija:

$I \leq K$ je IDEAL $\iff$ $\underbrace{K \cdot I}_{\text{vsi možni produkti}} \leq I$ in $I \cdot K \leq I$.

npr. soda števila v celih: $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

Opomba:

V nekomutativnem kolobarju se lahko zgodi, da je izpolnjen le en pogoj izmed dveh.

Primer:

z desne
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrike, ki imajo en stolpec 0}} = \begin{bmatrix} ax+by & 0 \\ cx+dy & 0 \end{bmatrix}$$

z leve
$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{bmatrix}$$

torej $K \cdot I \leq I$, a ne $I \cdot K \leq I$, torej gre le za LEVI IDEAL.

če je I levi in desni ideal, je dvostranski ideal in s tem IDEAL.

Jedra so vedno dvostranski ideali.

Tipični ideali: Let K komutativni kolobar in $x \in K$.

$K \cdot x$ so vsi večkratniki x: $\{a \cdot x \,;\, \forall a \in K\} \trianglelefteq K$
ideal, generiran z el. x

Let $x_1, \ldots, x_n \in K$. množica $\{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \,;\, \forall a_1, \ldots, a_n \in K\}$
ideal, generiran z naborom $x_1, \ldots, x_n$

je ideal v K $(\trianglelefteq K)$

Oznaka za ideal, generiran z $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq K$, je $(x_1, \dots, x_n)$.

Definicija: glavni ideal je tak, ki je generiran z naborom moči 1: $(x) \triangleleft K$

od prejšnjič dokazane trditve:

Trditev: $a \in K$ je obrnljiv $\Leftrightarrow (a) = K$

Trditev: K obseg $\Leftrightarrow K$ nima pravih idealov.

Primer: Let $I \triangleleft \mathbb{Z}$. Kaj so možnosti za I?

velja $I \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \in I$ in $(x \in I \Rightarrow -x \in I)$.

denimo, da je a najmanjši pozitivni element v I. $\underline{I = (a)}$ očitno velja $I \supseteq (a)$.

sedaj je $I \subseteq (a)$:

$$x \in I$$
$$x = a \cdot q + r \quad \boxed{r < a}$$
$$\underset{\underset{I}{\in}}{x} - \underset{\underset{I}{\in}}{a \cdot q} \in I \Rightarrow \boxed{r \in I}$$

ker je a najmanjši + el. v I, je $r = 0$. $\Rightarrow I \subseteq (a) \Rightarrow I = (a)$.

$\Rightarrow$ v $\mathbb{Z}$ so vsi ideali glavni: $(0), (1), (-1), (2), (-2), (3), \dots$

Kolobar $\mathbb{Z}$ je glavnoidealski kolobar.

Def.: Kolobar je glavnoidealski, če so vsi možni njegovi ideali glavni.

Primer: a je $(2) \cup (3)$ ideal? $\{0, 2, 3, 4, 6, 8, \dots\}$
ni ideal, ker ne vsebuje $3-2=1$.

Trditev: Naj K obseg. Tedaj je $K[x]$ glavnoidealski kolobar.

opomba: obrnljivi v $K[x]$ = obrnljivi v K

Dokaz: Naj $I \triangleleft K[x] \Rightarrow I$ podkolobar $\Rightarrow 0 \in I$ in $(\forall x \in I: x \in I \Rightarrow -x \in I)$. Recimo, da je $p(x)_{\neq}$ polinom najnižje stopnje v I (poljuben). neničelni
$I = (p(x))$ očitno velja $I \supseteq (p(x))$. Dokazimo
še $I \subseteq (p(x))$: Za $s(x) \in I$ velja $s(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
velja $\deg r(x) < \deg p(x)$ in
$$r(x) = s(x) - p(x)q(x) \in I \Rightarrow \deg r(x) = 0$$
$\square$

Opomba: Za a obrnljiv in x poljuben v K je
$(a \cdot x) = (x)$
$\supseteq$ očitno
$\subseteq$: očitno, saj je $x = a^{-1} a x$

Opomba: če K ni obseg $\Rightarrow K[x]$ ni glavnoidealski.

Primer: v $\mathbb{Z}[x]$ vzemimo $I = (x, 2) = \{x \cdot p(x) + 2 \cdot q(x);\ \forall p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$

ne obstaja element, ki deli x in 2 hkrati.

Primeri: • K obseg. $K[x]$ je glavnoidealski, a ni obseg (ker ima prave ideale)

• $K[x,y] = (K[x])[y]$ ni glavnoidealski:
(x,y) ni glavni ideal.

[Kvocientni kolobarji]

$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, $(K[x]_{p(x)}, +_{p(x)}, \cdot_{p(x)})$

V splošnem: vzemimo poljuben ideal #dvostranski

$I \triangleleft K$. definiramo relacijo:

$$a \sim_I b \ :\Longleftrightarrow\ a - b \in I.$$

je ekvivalenca

• refl: $a \sim_I a \Leftrightarrow 0 \in I$ ✓

• sim: $a - b \in I \Rightarrow b - a \in I$ ✓

• tranz: $a - b \in I \wedge b - c \in I \Longrightarrow$
$(a-b) + (b-c) \in I \Longleftrightarrow a - c \in I$ ✓

$K/_{\sim_I}$ je množica ekv. razredov. $[a] = \underbrace{a + I}_{\text{oznaka}}$

Primer: V $\mathbb{Z}$ vzemimo (5) in vpeljimo $\sim_{(5)}$: el. sta ekvivalentna, če imata isti ostanek pri deljenju s 5.

$$[0] = \{0, -5, 5, -10, 10, \dots\}$$
$$[1] = \{1, 6, 11, -4, -9, \dots\}$$
$$[2] = \{2, 7, -3, 12, -8, \dots\}$$

Definiramo seštevanje $+_I$ in množenje $\cdot_I$ glede na $\sim_I$ takole:

$$(a+I) +_I (b+I) := (a+b)+I$$
$$(a+I) \cdot_I (b+I) := (ab)+I$$

Korektnost definicije: naj bo $a+I = a'+I$ in $b+I = b'+I$.

$a - a' \in I$

$b - b' \in I$

$$\underline{(a+b)+I = (a'+b')+I} \iff a-a' + b-b' = (a+b)-(a'+b') \in I$$

$$\underline{(a \cdot b)+I = (a' \cdot b')+I} \iff a \cdot b - a' \cdot b' = a \cdot \underbrace{(b-b')}_{\in I} + \underbrace{(a-a')}_{\in I} b' \in I$$

$(K/_{\sim_I}, +_I, \cdot_I)$ je kvocientni kolobar K/I.

Primeri:

- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$
- $K/(0) = K$
- $K/K = \{0\}$ trivialni kolobar
- $\mathbb{R}[x]$, (x): $\mathbb{R}[x]/(x)$.

vsak element $\mathbb{R}[x]$ je v $a+(x)$ za nek $a \in \mathbb{R}$

$$p(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$$\| \quad a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x^n = a_0 + x(a_1 + \dots + a_n)$$

$$\mathbb{R}[x]/(x) \underset{\text{izomorfen}}{\cong} \mathbb{R}$$

- $\mathbb{R}[x]/(x^2)$. predstavniki: $(a+bx)+(x^2)$ pišimo kot (a,b)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^n$$

seštevanje: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

množenje: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac, ad+bc)$

$$[a+bx+(x^2)] + [c+dx+(x^2)] = ac + (ad+bc)x + (x^2)$$

- $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ ostanki so linearni polinomi $a+bx$, pišemo kot $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$a+bx+(x^2+1) + c+dx+(x^2+1) =$$

$$= a+c+(b+d)x+(x^2+1)$$

torej $(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d)$

$$[a+bx+(x^2+1)]\cdot[c+dx+(x^2+1)] =$$

$$= ac+adx+bcx+bd\boxed{x^2}+(x^2+1) =$$

$bd(x^2+1)-bd$ ups. druga stopnja, ni v idealu.

$$= (ac-bd)+(ad+bc)x+(x^2+1)$$

torej $\underline{(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd, ad+bc)}$

množenje v $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$$

[Izrek o izomorfizmu]

Let $\varphi: K\to L$ poljuben hom φ kolobarjev.

Vemo, da je $\ker\varphi \triangleleft K$ (ideal) in pravilo

$\bar{\varphi}(x+\ker\varphi) := \varphi(x)$ določa im φ kolobarjev

$$\bar{\varphi}: K/\ker\varphi \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}\varphi$$

Dokaz: definiramo $\bar{\varphi}: x+\ker\varphi \mapsto \varphi(x)$.

Dobra definiranost: let $x' \in [x]$: $x'+\ker\varphi = x+\ker\varphi$ $\quad x' = x + (x'-x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x') = \varphi(x) + \varphi(\underbrace{x-x'}_{\in\ker\varphi}) = \varphi(x)$$

torej $\bar{\varphi}$ je dobro definiran.

ali je $\bar{\varphi}$ hmg? seštevanje in množenje

$$\bar{\varphi}\big((x+\ker\varphi) \dot{+} (x'+\ker\varphi)\big) = \bar{\varphi}\big((x+x') \dot{+} \ker\varphi\big) =$$

$$= \varphi(x \dot{+} x') = \varphi(x) \dot{+} \varphi(x') = \bar{\varphi}(x+\ker\varphi) \dot{+}$$
$$\dot{+}\, \bar{\varphi}(x'+\ker\varphi)$$

torej je $\bar{\varphi}$ hmg.

$\operatorname{Im}\bar{\varphi} = \operatorname{Im}\varphi$ surjektivnost ✓

$\ker\bar{\varphi} = \ker\varphi = 0 + \ker\varphi \in {}^{R}/_{\ker\varphi}$ (trivialno jedro) injektivnost ✓

Primer: vzamem $\mathbb{R}[x]$. ogledamo si $\varphi_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$
$p(x) \mapsto p(i)$.

$\ker\varphi_i$ = polinomi, ki so deljivi z $(x-i)$
in posledično z $\underbrace{(x+i)}_{\text{konjugirane ničle}}$, torej
s produktom (x^2+1).

slika tega φ_i so vsa kompl. števila.