$\{a, b, c, d, e\}$

| $*_1$ | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d | e |
| b | a | b | c | d | e |
| c | a | b | c | d | e |
| d | a | b | c | d | e |
| e | a | b | c | d | e |

komut.: ni simetričen

$a * b = b$

$b * a = a$ ✗

asoc.: ✓ vedno z. operand

leva enota: vsak element

desna enota: ∅

$*_1(x, y) = y$

inverz: ni enote ⇒ ni inverzov.

⇒ polgrupa

N

$(\mathbb{R}, *)$

$$a * b = 1 - (a + b) + 2ab$$

komut: $1 - (a+b) + 2ab = 1 - (b+a) + 2ba$ ✓

asoc.: $(x * y) * z = 1 - \left(\left(1 - (x+y) + 2xy\right) + z\right) + 2\left(1 - (x+y) + 2xy\right)z =$

$= 1 - \left(1 - x - y + 2xy + z\right) + 2\left(1 - x - y + 2xy\right)z =$

$= 1 - 1 + x + y - 2xy - z + 2z - 2xz - 2yz + 4xyz$

$x * (y * z) = 1 - \left(x + 1 - y - z + 2yz\right) + 2x\left(1 - y - z + 2yz\right) =$

$= 1 - x - 1 + y + z - 2yz + 2x - 2xy - 2xz + 4xyz$

havoze ... iztaže se, da je asoc.

Komut. + leva enota $\Rightarrow$ enota

$e * a = a$:

$$1 - (e + a) + 2ea = a$$

$$1 - e - a + 2ea = a$$

$$1 - e + 2ea = 2a$$

$$2ea - e = 2a - 1$$

$$e(2a-1) = 2a - 1 \quad / : (2a-1)$$

$a \neq \frac{1}{2}$

$$e = 1$$

INVERZI:

$a * a^{-1} = 1$

$$1 - (a + a^{-1}) + 2a^{-1}a = 1$$

$$1 - a - a^{-1} + 2a^{-1}a = 1$$

$$2a^{-1}a - a^{-1} = 1 - 1 + a$$

$$a^{-1}(2a-1) = a$$

$$a^{-1} = \frac{a}{2a-1} \quad \left[a \neq \frac{1}{2}\right]$$

Leva za $a = \frac{1}{2}$:

$$1 * \frac{1}{2} = 1 - (1 + \frac{1}{2}) + 2\frac{1}{2} =$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= 1/2 \ \checkmark$$

Leva za $a = \frac{1}{2}$?

$$1 - (a + \frac{1}{2}) + 2a\frac{1}{2} = 1$$

$1 - a - \frac{1}{2} + a = 1$ — $1/2$ nima inverza!

$\frac{1}{2} = 1$ ✳

Ni grupa, je monoid.

---

N

$(\{a,b,c\}, *)$ je monoid:

| $*$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | c | b | a |
| b | ? | ? | b |
| c | a | b | c |

Ha koliko načinov lahko izpolnimo tabelo?

Ker c je lahko enota:

...

---

N

$(\mathbb{N}, *)$ $\quad a * b = a^b$

komut: $a * b \stackrel{?}{=} b * a$ — velja ali ne

$a^b \stackrel{?}{=} b^a$

✗

$2^3 = 8$

$3^2 = 9$ CRE

asoc.: $(a * b) * c \stackrel{?}{=} a * (b * c)$

✗

$2^{(2^3)} \neq (2^2)^3$

$2^8 = 256 \qquad 4^3 = 64$

$(\mathbb{N}, *)$ $\quad a * b = \gcd(a,b)$ <u>notr. oč.</u> $+_0$

<u>asoc.</u>

$(a*b)*c = a*(b*c)$

$\gcd\{a,b,c\} = \gcd\{a,b,c\}$

<u>komut</u> oč. $+_0$ $\Rightarrow$ komutativna polgrupa

<u>enota:</u> $\nexists$ RAA

---

Za $a * b := \text{lcm}(a,b)$ pa je komutativni monoid

---

$(\mathbb{N}, *)$ $\quad a * b = \min(a,b)$

asoc ✓ komut ✓ enota ✗

komutativna polgrupa

---

$(\mathbb{R}_0^+, *)$ $\quad a * b := \sqrt{a^2+b^2}$

kom ✓

asoc ✓

$\sqrt{a^2+\sqrt{b^2+c^2}^2} = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}^2+c^2}$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

komutativni monoid

enota 0

inverzi: $a^{-1} * a = 0$ $\nexists$ za 1 par:

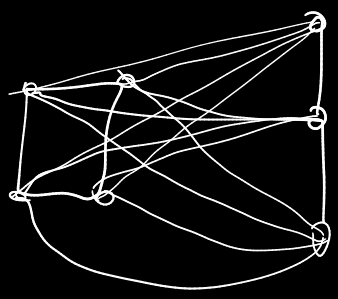
inverz le za 0.

$\sqrt{1+x} = 0$ za $x \geq 0$

N

$G_1, G_2$ i $G_1 \circ G_2$: graf, kjer vozlišča $G_1$ povežemo z vozlišči $G_2$.
(spoj grafov)

$C_4 \circ P_3$



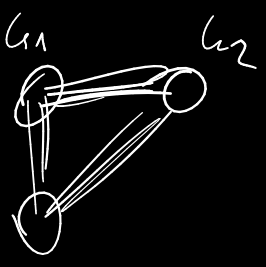
let A množica vseh končnih grafov.
$(A, \circ)$.

komut: ✓

asoc: je alocintivna-
shematsko:

enota:
prazen graf

inverz:
le enota




N

$V = \{0 .. (n-1)\}$ A naj bo množica vseh možnih grafov za $VG = V$

$G_1 * G_2$ = graf, v katerem sta u in v sosedji, če sta sosedji v vsaksko enem izmed $G_1$ in $G_2$

glejmo komplite povezanosti in XOR:
komut ✓

asoc ✓

enota je $\overline{1_n}$

inverz od a je a

abelova grupa.

VZEMIMO BCA 7: grafi let vozlišč i sedo stopnje iz B.

enota ostane.

inverzi usebovani ✓

notranjost *:

$\forall u \in V$: $\deg_{G_1} u = 2k$

$\deg_{G_2} u = 2l$

$\deg_{G_1 * G_2} = 2k + 2l - n' - n' - 2(k + l - n')$

---

N

G grupa, $Z(G) := \{ x \in G \mid \forall y \in G : xy = yx \}$

$ZG \subseteq G$ podgrupa

$(ZG, \circ)$ grupa

enota ✓ $\forall a \in G : ae = ea = a$

$a \in ZG \Rightarrow a^{-1} \in ZG$

$\forall g \in A$: $ag = ga \quad / \cdot a^{-1}$

$a^{-1}ag = a^{-1}ga \quad / \cdot a^{-1}$

$ga^{-1} = a^{-1}g\,\cancel{aa^{-1}}$ ✓

inverzi so v centru.

notranjost operacije:

$a,b \in Z(G) \Rightarrow a*b \in Z(G)$

$\forall g \quad ag = ga \;\wedge\; bg = gb$

$/\cdot b$

$agb = gab$

komut

$(ab)g = g(ab)$ ✓

PODGRUPA ✓

---

N

$A = \{0,1,2\}$ * je kom, a ne asoc

| * | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 0 |

$(0\,2)\,1 = 2$

$0(2\,1) = 1$

---

N

$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} ;\ a,b,d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\}$

ali je z množenjem matrik $M_1$ grupa?

zaključek: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & \cdots \\ 0 & d_1d_2 \end{bmatrix}$ ✓

asoc.: ✓ poledujemo

kvota: ✓ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

inverzi:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -0 & a \end{bmatrix}$$ ✓