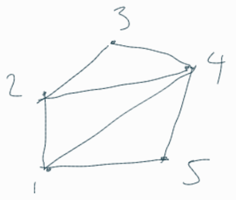
N

$G=(V,E)$ $V=\{1,2,\dots,5\}$ $E=\{12,14,15,23,34,45\}$
24

najkrajši poti u-v rečemo geodetka

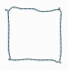


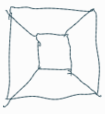
node	ecc(node)
1	2
2	2
3	2
4	1
5	2

univerzalno vozlišče je stopnje $n-1$ za graf z n vozlišči in $ecc(u,v)=1$

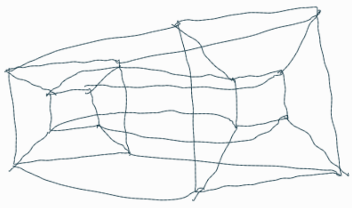
Graf ni dvodelen, saj vsebuje lih cikel.

N

Q_2: 

Q_3: 

Q_1:

Q_4: 

hiperkocka ima 2^d vozlišč

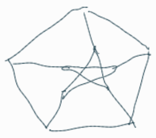
hiperkocka je regularna -- vsa vozlišča imajo isto stopnjo d.

$$|E(Q_n)| = n\cdot 2^{n-1}$$

$diam(Q_d)=d$ (XOR z $0b\underbrace{111\dots111}_{d}$) je najbolj oddaljeno vozlišče

N

Posplošeni petersenovi grafi: $G_{n,k}$

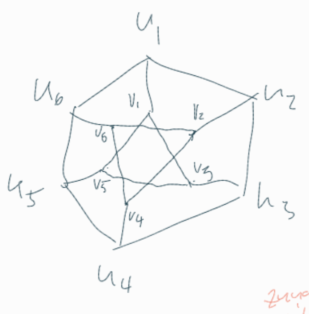


$G_{5,2}$

za katere n,k $k<\frac{n}{2}$ je petersenov graf $G_{n,k}$ dvodelen?

$$V(G_{n,k}) = \{\underbrace{u_1,\dots,u_n}_{\text{zunanja}}, \underbrace{v_1,\dots,v_n}_{\text{notranja}}\}$$

$G_{6,2}$

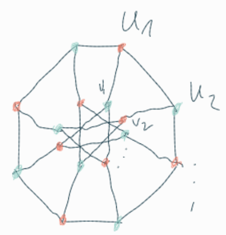


3 tipi povezav:
- cikel $\vec{u}$
- prečke $u_i - v_i$
- notranje $v_i - v_{(i+k)\% n}$

zunanji cikel

$G_{n,k}$ bipartiten $\Rightarrow$ n sod, k lih

to je cikel dolžine $k+3 = k+1+1+1$

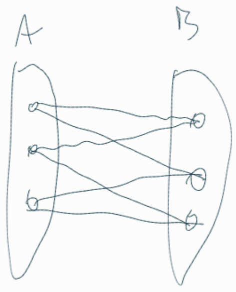


A	B
u_1	u_2
u_3	u_4
⋮	⋮
v_2	v_1
v_4	v_3
⋮	⋮

N

G dvodelen k-regularen z vsaj eno povezavo

$\Rightarrow$ A, B enakomočni

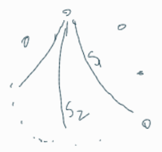


$$\sum_{u \in A} \deg u = |E(G)| = \cancel{k}|A| = \sum_{u \in B} \deg u = \cancel{k}|B|$$

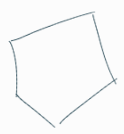
$$\Rightarrow |A| = |B|$$

N

Krožni grafi: $Cir(n, \{s_1, \dots, s_k\})$



$C_5 = Cir(5, \{1\})$



a) recimo, da je n lih. ali je lahko graf bipartiten, če je $k \geq 1$.

$C_n = Cir(n, \{1\})$

Vsa vozlišča so iste stopnje $\Rightarrow$ graf je regularen. po prejšnji nalogi mora veljati $|A| = |B|$, da bo bipartiten, kar ni možno ker je vozlišč liho.

b) Kaj pa, če je n sod in $s_1, \dots s_k$ so lihi. ali je tak graf vselej bipartiten?

navedimo biparticijo:

A	B
u_1	u_2
u_3	u_4
u_5	u_6
$\vdots$	$\vdots$
u_{n-1}	u_n

zaradi navodila bo liho vozlišče imelo le lihe sosede.

vozlišči u_i in u_j sta povezana, ko $(i-j) \% n \in \{s_1, \dots, s_k\}$

ali povezani? sko?

$A \cup B = V(Cir(n, \vec{s}))$

$A \cap B = \emptyset$

pomembno je, da $k \geq 1$ in $\exists s_i \ni: s_i \neq 0$

po definiciji krožnega grafa

N

graf je povezan, ko je $\Omega(G) = 0$.

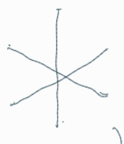
$G = Cir(n, \{s, n-s\})$. koliko ima ta graf povezanih komponent?

$n=6$ $s=1$

$\gcd(6,1)=1$

1

$n=6$ $s=3$



3

$\gcd(3,6)=3$

$n=10$ $s=4$

2

$\gcd(10,4)=2$

$n=6$ $s=2$

2

$\gcd(6,2)=2$

trditev: $\Omega\, Cir(n, \{s, n-s\}) = gcd(n, s)$

switch
case $gcd(n,s) = 1$:

v isti komponenti sta vertices, ko je

$$0 + ks = 1 \mod n$$

$$\iff gcd(n,s) = 1$$

case $gcd(n,s) > 1$:

...

N

TRDITEV: let G enostaven graf (neusmerjen, brez zank)

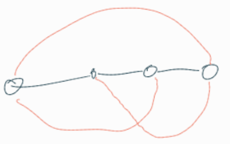
$(V(G), E(G))$.

G je povezan ali G' je povezan.

komplement: $G' = (V(G), \{\{u,v\};\ \forall u,v \in V(G) \wedge \{u,v\} \notin E(G)\})$

ali je lahko $G = \bar{G}$?

ali sta lahko G in $\bar{G}$ povezana?



DOKAZ: Recimo, da G ni povezan. $\Omega(G) > 1$ (če je, je že dokazano)

vzemimo poljuben $x, y \in V(G)$

switch

case $\{x,y\} \in E(\bar{G})$ ✓

case $\{x,y\} \notin E(\bar{G}) \Rightarrow x,y \in E(G)$:

x, y sta v isti komponenti v G

$\exists w \in V(G)$ iz druge komponente

$\{x,w\} \notin E(G)$, $\{y,w\} \notin E(G)$ $\Rightarrow$ $\{x,w\} \in E(\bar{G})$, $\{y,w\} \in E(\bar{G})$

$\exists$ pot $x\,w\,y$ je xy-pot.

komplement je povezan!

$\square$

N

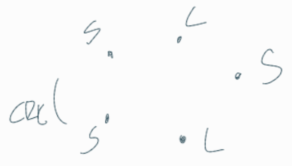
G je povezan graf in G ni dvodelen.

$\iff \exists\, u,v,\ \{u,v\} \in E(G)$ $\ni$: $\deg u + \deg v$ soda

DOKAZ: 1. način z izjemami:

($\Rightarrow$): Vemo, da obstaja lih cikel

u naj bo na tem ciklu in naj bo sode stopnje



2. način:

RAAPDO sosednji vozlišči morata biti različne parnosti

sedaj lahko naredimo particijo: A: vozlišča sode stopnje; B: vozlišča lihe stopnje

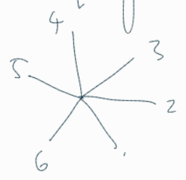
$A \cap B = \emptyset \quad A \cup B = V(G)$

med A in B ni povezav,

kar je v protislovju z RAAPDO

PROTIPRIMER da je G povezan dvodelen in vsaki sosednji vozlišči imata sod sum stopenj:

$K_{1,n}$ je zvezda



za sode n je to protiprimer.

N

$G=(V,E)$ povezan, $\Omega(G)=1$.

povezava je most, če ima graf brez nje večjo Ω kot orig. graf.

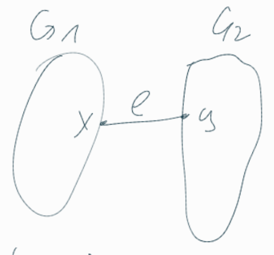
drevo je graf brez ciklov. tam je vsaka povezava most.

G ima most $\Rightarrow$ G ima vsaj 2 vozlišči lihe stopnje

predpostavimo G ima most.

RAAPDO G nima vozlišč lihe stopnje.

naj bo $e=\{x,y\}$ most



handshaking lemma: v ~~povezanem~~ grafu je sodo vozlišč lihe stopnje.

ko odstranimo e, je x lihe stopnje, zato mora biti v G_1 po HL še eno liho vozlišče, kar je v ✗ z PDD.

PREREZNO VOZLIŠČE je tako, da ima originalen graf manj particij kot graf brez tega vozlišča.

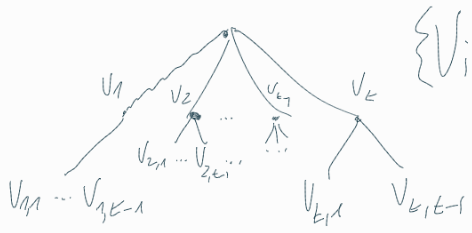
N

vsak k-regularen graf z ožino 5 ima vsaj k^2+1 vozlišč.

$\downarrow$

najkrajši lih cikel je dolžine 5.

$1 + k + k(k-1) = 1+k+k^2-k = k^2+1$



$\{V_i, V_j\} \notin E(G)$, sicer bi v tem primeru $\exists$ cikel 3

$V_{i,j} \neq V_{k,\ell}$, sicer bi v tem primeru $\exists$ 4 cikel