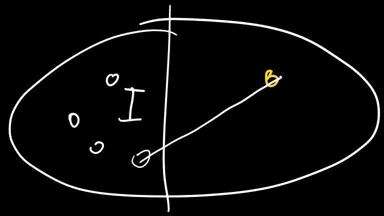
I   maksimalna neodvisna množica.



let $X \subseteq VG$, $D \subseteq VG$ dominira X, če

$$\forall x \in X: x \in VD \vee (\exists a \in VD : \{a,x\} \in ED)$$

zdb: za vsako vozlišče iz X velja, da je v D ali pa da ima soseda iz D.

$N_G(u) = \{ v ; \{u,v\} \in EG \}$ soseščina - sosedje u v G

$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$ zaprta soseščina vozlišča D

$N_G[D] = \bigcup_{u \in D} N_G[u]$ zaprta soseščina množice D

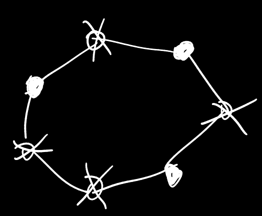
D dominira X $\iff$ $X \subseteq N_G[D]$

Če D dominira VG, pravimo, da je D dominantna množica grafa G.

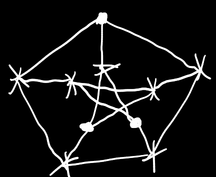
Moč najmanjše dominacijske množice za G je dominacijsko število grafa G, označimo $\gamma(G)$.
↳ tokrat res gama

OPOMBA: Vsaka maksimalna neodvisna množica grafa je njegova dominantna množica.

$\gamma K_n = 1$ $\gamma C_n = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$



$\gamma P \leq 3$ sodeč po risbi:



$\gamma P > 2$, saj zaradi stopenj 3 dvema vozliščema potrebno največ $(3+1) \cdot 2 = 8$ vozlišč, $\Longrightarrow \gamma P = 3$

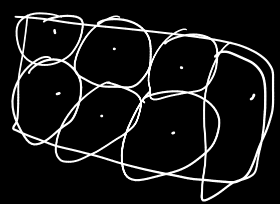
Trditev: Za vsak graf brez izoliranih vozlišč velja, da je

$$\left\lceil \frac{|VG|}{\Delta G+1} \right\rceil \leq \gamma G \leq \left\lfloor \frac{|VG|}{2} \right\rfloor$$

določanje γG je težek problem, NP-popoln.

Dokaz: Spodnja meja: če je D dominantna množica in $u \in D$, potem u dominira $\leq \deg_G u + 1$ vozlišč. Torej vsako vozlišče iz D dominira kvečjemu $\Delta G+1$ vozlišč. Ker je $\underbrace{VG \subseteq N_G[D]}_{\text{unija zaprtih okolic pokrije cel graf}}$, je torej $|D| \geq \frac{|VG|}{\Delta G+1}$

unija zaprtih okolic pokrije cel graf:



$$|VG| = |N_G[D]| =$$

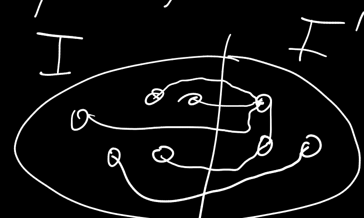
$$= \left| \bigcup_{u\in D} N_G[u] \right| \leq \sum_{u\in D} |N(u)| \leq \sum_{u \in D} (\Delta G+1) = \gamma G(\Delta G+1).$$

Dokaz zgornje meje: Let I poljubna maksimalna neodvisna množica. Vemo, da je I tedaj dominantna množica.

če je $|I| \leq \frac{|VG|}{2}$ ✓

drugače vzemimo $I' = VG \setminus I$ (komplement).

trdimo, da je I' dominantna.



vzemimo poljubno $u \in G$.

če $u \in I'$ dominira samega sebe ✓.

drugače: ker je G brez izoliranih vozlišč, ima u vsaj enega soseda. Ker je I neodvisna, je ta sosed v I'.

— torej je I' dominantna

$$\gamma G \leq \min\{|I|, |I'|\} \leq \frac{|VG|}{2}, \text{ ker je } I \cup I' = VG$$

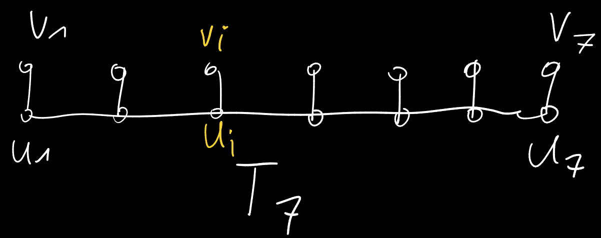
Primeri, kjer velja enakost spodnje meje

K_n $\qquad \frac{|VK_n|}{\Delta K_n + 1} = \gamma K_n = 1$

C_n: $\qquad \frac{|VC_n|}{\Delta C_n + 1} = \gamma C_n = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

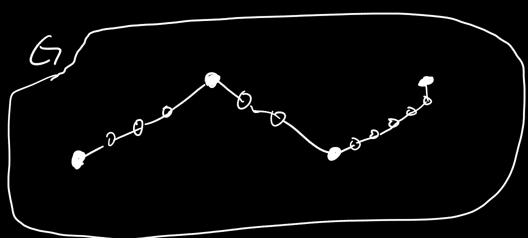
zgornje meje:

glavniki: T_n:



$\forall i \in \{1..7\}$: Da dominiramo v_i, mora dom. množ. vsebovati vsaj enega izmed $\{v_i, u_i\}$,
Torej vsaka dominantna množica T_n vsebuje vsaj n elem.
torej $\gamma T_n \geq n$, po zgornji meji $\gamma T_n \leq n$
torej $\gamma T_n = n = \frac{|VT_n|}{2}$.

Def.: Množica X je 2-pakiranje grafa G, če velja:
$x, y \in X$, $x \neq y$, potem $d_G(x,y) \geq 3$

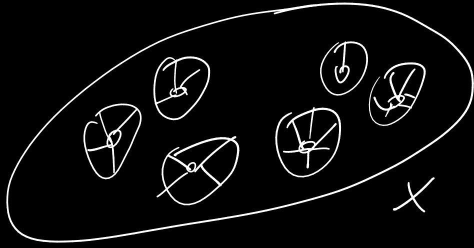


$\bullet \in X \in G$

$\circ \notin X \in G$

zdb: X je 2-pakiranje $\iff \forall x, y \in X, x \neq y: N_G x \cap N_G y = \emptyset$
moč največjega 2-pakiranja G je 2-pakirno število oz. pakirno število, označa ρG
↳ \rho

TRDITEV: Če je G povezan graf, je $\gamma G \geq \rho G$.
Dokaz: Vzemimo največje možno 2-pakiranje X, $|X| = \rho G$.
Vzemimo poljubno dominantno množico D.



Če je $x \in X$, ga lahko dominirao z enim vozliščem iz njegove $N_G[x]$: $\forall x \in X : N_G[x] \neq \emptyset$

ker so $N_G(x)$, $x \in X$ paroma disjunktne $\Rightarrow$

$$|D| \geq |X|.$$

Če je D najmanjša dominantna množica, velja

$$\gamma G = |D| \geq |X| = \rho G.$$

Če za 2-pakiranje X grafa G velja, da je

$$\bigcup_{u \in X} N_G[u] = VG \quad (*) \Longrightarrow$$ X je popolna koda grafa G.

Posledica: Če graf G premore popolno kodo, potem je

$$\gamma G = \rho G.$$

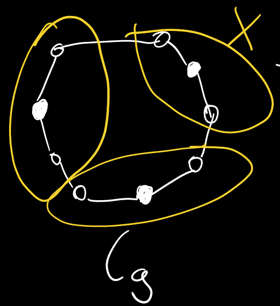
Dokaz: Po trditvi je $\gamma G \geq \rho G$. Let X popolna koda v G. Potem pogoj $(*)$ pravi, da je X dominantna množica G. Torej je $\gamma G \leq |X| = \rho G$

↳ X popolna koda

Primeri grafov s popolno kodo:

K_n: $\gamma K_n = 1 = \rho G$.

C_{3n}:

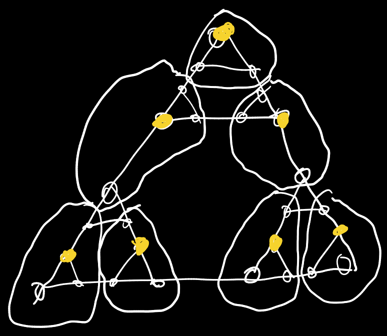


to je 2-pakiranje z disjunktnimi zaprtimi okolicami

X je popolna koda, ki je najmanjša dominantna množica.

vozlišča •

NTS patch yournalt scrollbar



X množica vozlišč

zaprte okolice so disjunktne

X je popolna koda G, kato je po posledici $|X| = \rho G = \gamma G = 7$

Izrek: Če je H vpet podgraf G, je $\gamma G \le \gamma H$.

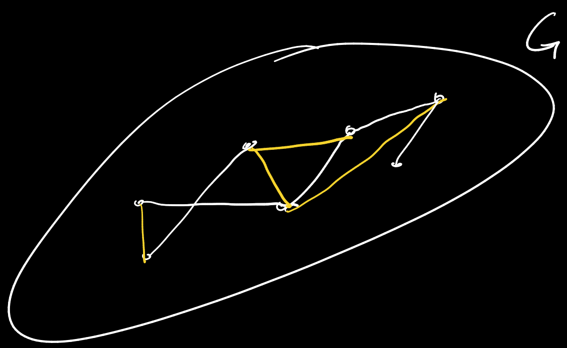
↳ odstranjevanje povezav.

Dokaz: let D minimalna dominantna množica za H.

$|D| = \gamma(H)$. Tedaj je D tudi dominantna množica za graf G. očitno. $H \to G$ je zgolj dodajanje povezav.

$\Downarrow$

$\gamma G \le |D|$.



so v G, a ne v H.

Izrek: Če je G povezan graf, premore vpeto drevo T, $\exists$: $\gamma G = \gamma T$.

OPOMBA: za drevo dominacijsko število določimo v $O(n^2)$ času.

Toda vpetih dreves je eksponentno mnogo glede na $|VG|$.

Dokaz: algoritmičen

let $e_1, \cdots e_m$ poljubno zaporedje povezav grafa G.

Poglejmo naslednji algoritem:

```
H := G
for i in {1..m}:
    če  H-e_i povezan in γ(H-e_i) = γH :
        H := H - e_i
```

↳ težko

Trdimo: H je vpeto drevo po preteku algoritma.

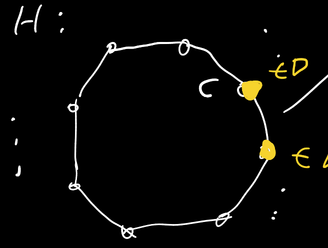
- H je povezan ✓ po def. algoritma
- $\gamma H = \gamma G$ ✓ po def. alg.
- H nima ciklov

↳ Dokaz: opazujmo poljubno minimalno dominantno množico D grafa H. PDDRAA: H premore cikel C:

switch:

case D ima na C $\boxed{2}$ zaporedni vozlišči:

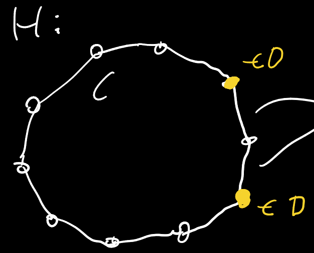
H:



✗ to povezavo bi algoritem odstranil. povezanost se ohrani, obe vozlišči itak dominirata sami sebe.

case D ima na C $\boxed{2}$ vozlišči, ki sta na razdalji 1.

H:

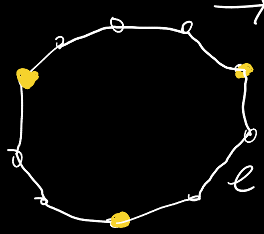


✗ algoritem bi eno izmed teh povezav odstranil.

—||—

case $\forall u, v \in D, u \neq d: d_C(u,v) \geq 3$

to vključi primer, ko na ciklu ni vozlišč iz D

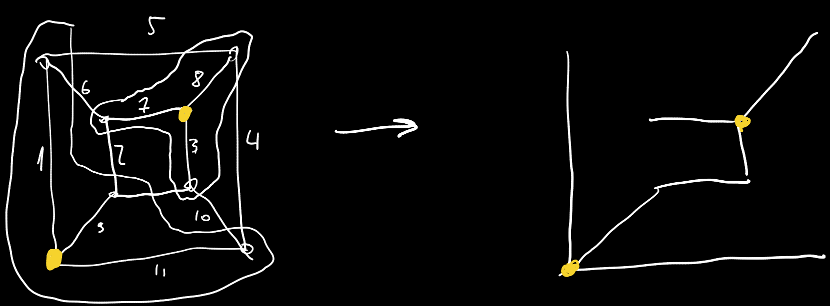


✗ tedaj na C obstaja povezava e, katere krajišči nista v D.
e bi algoritem odstranil.

—||—

hctiws - to so vsi primeri □ H je vpeto drevo z isto $\gamma H = \gamma G$

Primer: D



$\gamma Q_3 = \underline{2}$.

$\gamma Q_n = ?$ ne vemo, razen za točke s popolno kodo, torej $n = 2^k - 1$

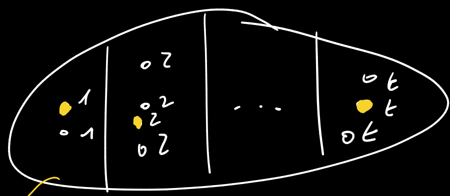
nts oeis podobni sequenci kot $2, \ldots\ldots$

Trditev: Če je G graf z vsaj eno povezavo, je

$$\gamma G \leq \chi \bar{G}$$

Dokaz: let $\chi \bar{G} = k$

$\bar{G}$:

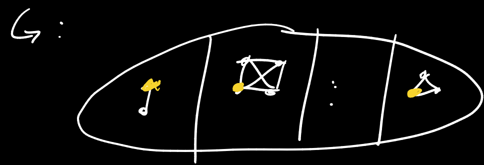


k-barvanje C.

V vsakem barvnem razredu izberemo po eno vozlišče. Dobljena množica D je dominantna množica za G.

Barvni razredi iz $\bar{G}$ so v G polni podgrafi. Seveda torej po eno vozlišče iz takega podgrafa dominira cel ta podgraf.

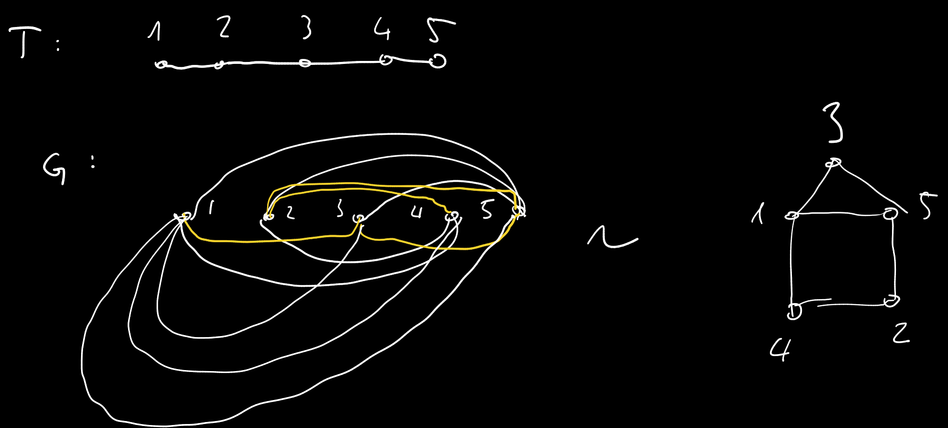
G:



$$\gamma G \leq |D| = \chi \bar{G}$$

Primer: let T poljubno drevo, $|VG| \geq 3$

let $G = \bar{T}$.



$\gamma G = 2$. poglejmo poljubno povezavo e v T: e je most. krajišča e dominirata komplementa komponent $T - e$.

$\chi \bar{G} = 2 = \chi \bar{\bar{T}} = \chi T = 2$

(za drevesa imamo enakost)

Pojmi:

dominantna množica D je:

... povezana dominantna množica, če inducira povezan podgraf ↳ internet

... neodvisna dominantna množica, če inducira podgraf brez povezav

... celotna dominantna množica, če ima vsako vozlišče iz V_G soseda v D.

↳ tudi vozlišča iz D morajo imeti soseda v D.

spet lahko iščemo najmanjše take množice. njihove velikosti so:

- povezano dominacijsko število

$\gamma_c(G)$

↳ „connected"

- neodvisnostno dominacijsko število

$\gamma_i(G)$

↳ „independent"

- celotno dominacijsko število

$\gamma_t(G)$

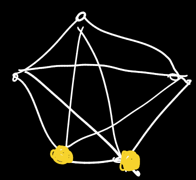
↳ „total"

↳ pa si oglejmo celotno malenkosti o celotnem dom. št.

NTS: do sem se nisem spomnil na BOSu

$\gamma_t K_n = 2$

$n \geq 2$



„pazi, ti se dominirajo“

$$\gamma_t P_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

↳ za dokazati je treba pogledati primere

$n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$

OPOMBA: $\gamma_t G$ je dobro definiran za vse grafe brez izoliranih vozlišč.

TRDITEV: Za vsak graf brez izoliranih vozlišč velja:

$$\gamma G \leq \gamma_t G \leq 2 \gamma G$$

DOKAZ: $\gamma G \leq \gamma_t G$ očitno

↳ strožji pogoj

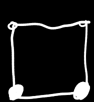
$\gamma_t G \leq 2 \gamma G$

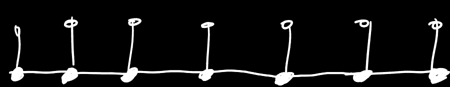
začnemo z poljubno dominantno množico D

vsakemu $x \in D$ priredimo soseda od x, recimo mu x'

$\hat{D} = D \cup \{x' ; x \in D\}$. tedaj je $\hat{D}$ celotna dominantna množica in ima največ $2|D|$ vozlišč.

Primer za enakost:

C_4:  $\gamma C_4 = \gamma_t C_4 = 2$

T_n glavnik: 

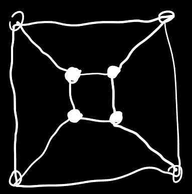
$\gamma T_n = n$

- D je celotna dominantna množica.

Primer za neenakost:

$\gamma = 1 \quad \gamma_t = 2$

Q_3:



$\gamma Q_3 = 2$

$\gamma_t Q_3 = 4$