$\chi' G$ (kromatični indeks) je min št. barv za barvanje povezav.

$\Delta G \leq \chi' G \leq \Delta G + 1$ (Vizingov izrek)

$\Delta G = \chi G$ ~ graf razreda I

$\Delta G + 1 = \chi G$ ~ graf razreda II.

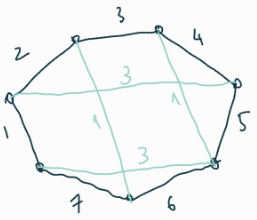
IZREK:

$\forall n \geq 2$ je K_n razreda 1 $\iff$ n sod

S $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & ; n \text{ sod} \\ n & ; n \text{ lih} \end{cases}$

DOKAZ: (neodvisen od Vizingovega izreka)

lih n:



(številka je barva)

po ciklu C_n so nadaljnje povezave „vzporedne" z vsaj eno stranico.

C_n je pravilen n-kotnik

tako nadaljujemo do K_n. zaradi geometrije vzporedne povezave nimajo stičnih krajišč $\Rightarrow$ to je torej dobro barvanje povezav

$\Longrightarrow \chi' K_n \leq n$ za lihi n.

dokažimo še $\chi' K_n \geq n$ n je lih. $\Rightarrow n = 2k+1$.

v K_n: največ koliko povezav lahko pobarvamo z isto barvo?

(*) vsakič, ko z isto barvo pobarvamo povezavo, pretvrimo s to povezavo k vozlišči.

Predpostavimo, da nam uspe pobarvati graf le z $2k$ barvami.

zaradi (*) smo pobarvali kvečjemu $\underbrace{2k}_{\text{barv}} \cdot \underbrace{k}_{\text{kvečjemu k povezav z isto barvo}}$ povezav.

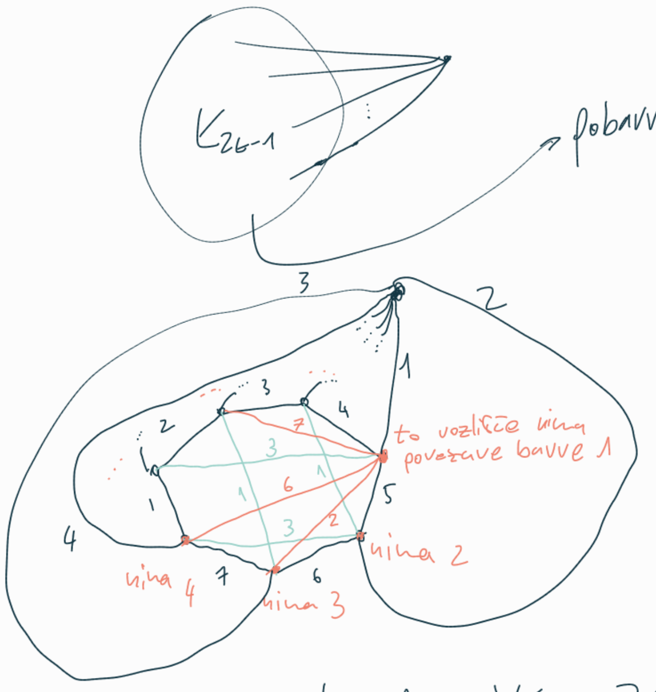
toda naš graf ima

$|EK_{2k+1}| = \binom{2k+1}{2} = \frac{(2k+1)2k}{2} = 2k^2 + k$, kar je več kot $2k^2$

$\chi' K_{2k+1} \geq 2k$, torej $\chi' K_{2k+1} = 2k+1$

Sedaj še n sod. $n = 2k$

Vzemimo K_{2k-1} in dodajmo vsem sosednje vozlišče:



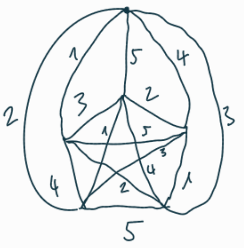
pobarvajmo kot v konstrukciji za lih n.

dodatno vozlišče lahko torej pobarvamo brez dodajanja barv.

torej $\chi' K_{2k} = 2k - 1$ $\square$

primer K_6:

K_5 s 5 barvami



K_6 s 5 barvami

IZREK: Vsi dvodelni grafi so razreda I.

Dokaz z indukcijo po št. povezav:

BAZA: • $\Delta = 0 = \chi'$

$\Delta = 1 = \chi'$

KORAK: let G dvodelen z vsaj 2 povezavama.

poljuben $e = \{x, y\} \in EG$; $H = G - e$

H je očitno dvodelen.

Po I.P. velja: $\chi' H = \Delta H$

switch

case $\Delta H < \Delta G$: tdb: z odstranitvijo povezave smo zmanjšali stopnjo grafa.

potem lahko H pobarvamo po povez. z $\Delta H = \Delta G - 1$ barvami.

nato v G povezavo e pobarvamo z novo barvo ΔG in dobimo barvanje G z ΔG barvami

case $\Delta H = \Delta G$:

po I.P. lahko H pobarvamo z $\Delta H = \Delta G$ barvami.

naj bo $c: EH \to \{1..\Delta H\}$ tako barvanje povezav H.

$\deg_H x < \Delta G$

$\deg_H y < \Delta G$, saj smo njuno povezavo odstranili in se Δ ni spremenila.

torej na povezavah pri x vsaj 1 barva manjka. prav tako pri y. naj bosta ti dve barvi α in β.

switch:

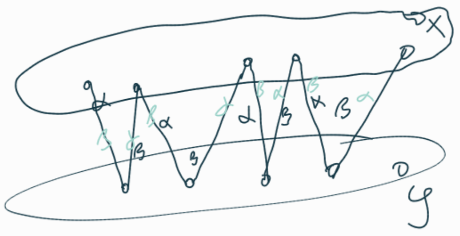
case $\alpha = \beta$:

e pobarvamo z α in ✓.

case $\alpha \neq \beta$:

tedaj $\exists$ pri krajišču x barva β, sicer smo v primeru α

naredimo alternirajočo pot iz x z barvama β in α:



nekje se ustavi ta pot, ko ni več β.

sedaj na tej poti zamenjamo α in β.

trdimo, da s tem še vedno imamo dobro barvanje za H. in je.

sedaj v x nimamo več barve β (po zamenjavi). pri x in y manjka $\beta \implies$ gremo v primer od prej in ✓

$\square$

Primer: (problem urnika):

sestavljamo urnik: razredi, učitelji, #ur učitelja v razredu/teden

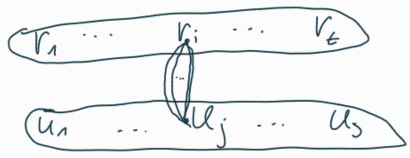
ali lahko sestavimo urnik tako, da zasedemo najmanj možno tedenskih ur?

zdb da bo šola odprta najkrajši čas.

let $r_1, \dots, r_t$ razredi

let $u_1, \dots, u_s$ učitelji

G:



t_{ij} = # ur učitelja u_j v razredu r_i na teden.

· med r_i in u_j dodamo t_{ij} vzporednih povezav.

dokaz zadnjega izreka velja tudi za multigrafe.

↳ G dvodelen multigraf $\Rightarrow \chi' G = \Delta G$

$\deg_G r_i$ = # tedenskih ur razreda r_i

$\deg_G u_j$ = # tedenskih ur učitelja u_j

odpiralni čas šole (iskano število za urnik) $\geq \Delta G$

sedaj G pobarvamo po povezavah z ΔG barvami

barve so fiksne ure v tednu.

[NEODVISNE IN DOMINANTNE MNOŽICE]

Def.: Če je G graf in $I \subseteq VG$, potem je I neodvisna množica, če nobeni dve vozlišči iz I nista sosednji.

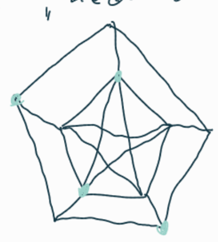
(v podgrafu induciran z I, je brez povezav)

Moč največje neodvisne množice v G je „neodvisnostno število grafa G", oznaka αG.

Primer: $\alpha K_n = 1$

$\alpha C_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

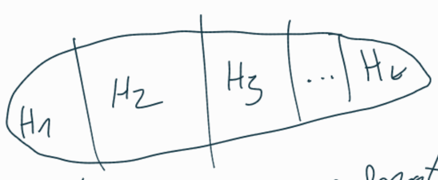
$\alpha P =$



$\alpha P \geq 4$, ker smo našli neodv. mn. moči 4.

Toda iz ____ vemo, da sta na zunanjem 5 ciklu lahko max 2 vozlišči, prav tako na notranjem, zato $\alpha P = 4$

G



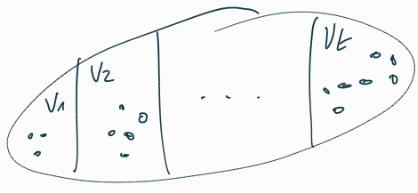
↳ inducirani podgrafi

$$\alpha G \leq \sum_{i=1}^{t} \alpha H_i$$

TRDITEV: $\forall G \in \mathcal{G}: \alpha G \cdot \chi G \geq |VG|$

DOKAZ: let $\chi G = t$ in let $V_1, V_2, \dots, V_t$ barvni razredi nekega fiksnega barvanja s t barvami

Vsak V_i je neodvisna množica, saj znotraj posameznega povezav ni.



$|V_i| \leq \alpha G$

$i \in \{1..t\}$

$$\Rightarrow |VG| = \sum_{i=1}^{t} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{t} \alpha G = (\alpha G) \cdot t = \alpha G \cdot \chi G$$

$$\Rightarrow \alpha G \geq \frac{|VG|}{\chi G}$$

KDAJ PA JE DOSEŽENA ENAKOST? □

$P: \frac{|VP|}{\chi P} = \frac{10}{3} \Rightarrow \alpha P \geq 3\frac{1}{3}$ ✓

$K_n: \frac{|V(K_n)|}{\chi K_n} = \frac{n}{n} = 1 = \alpha K_n$

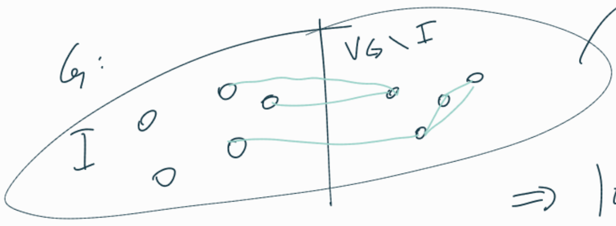
$C_{2n}: \frac{|V(C_{2n})|}{\chi C_{2n}} = \frac{2n}{2} = n = \alpha C_{2n}$

Primer  $K_{1,n}$: $\frac{|VK_{1,n}|}{\chi K_{1,n}} = \frac{n+1}{2}$.

Zgornja meja za neodvisnostno število:

<u>TRDITEV</u>: $\alpha G \leq |VG| - \frac{|EG|}{\Delta G}$

<u>DOKAZ</u>: Let I poljubna neodvisna množica v G $\ni$: $|I| = \alpha G$



tu je vozlišč $|VG| - \alpha G$

$\Rightarrow |EG| \leq (|VG| - \alpha G) \cdot \Delta G$

$$|EG| \leq |VG| \Delta G - \alpha G \Delta G$$

za $\Delta \geq 1$

$$\alpha G \Delta G \leq |VG| \Delta G - |EG|$$
$$\alpha G \leq |VG| - \frac{|EG|}{\Delta G}$$

Primer: Q_d, $d \geq 1$

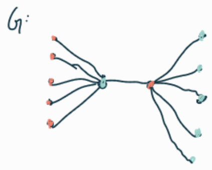
$$\alpha Q_d \leq |VQ_d| - \frac{|EQ_d|}{\Delta Q_d} = 2^d - \frac{d \cdot 2^{d-1}}{d} = 2^d - 2^{d-1} = 2^{d-1}$$

$$\alpha Q_d \geq \frac{VQ_d}{\chi Q_d} = \frac{2^d}{2} = 2^{d-1}$$

$\Rightarrow \alpha Q_d = 2^{d-1}$

Kaj pa dvodelni?

delitev X, Y:



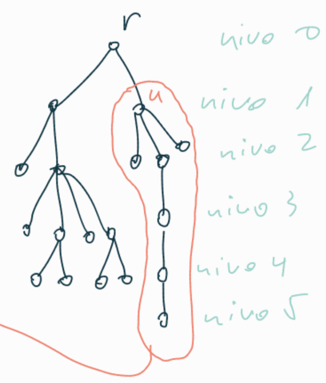
$|X| = |Y| = 6$

$\alpha G = 10$

premislimo za drevesa, koliko je αT.

naj bo T poljubno drevo in $r \in VT$.

Poglejmo T kot drevo s korenom r.



$u \in T$ je na nivoju $d_T(u, r)$.

to je poddrevo s korenom u

$I(u)$ = velikost največje neodvisne podmnožice v poddrevesu s korenom u.

$$\alpha T = I(r) = ?$$

oznaka za sorodstva v drevesu:

child : potomec

grandchild : drugi potomec

neka neodvisna množica v T:

switch:

case vsebuje r:

$\Rightarrow$ ne vsebuje potomcev r.

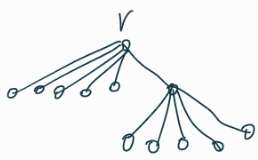
case ne vsebuje r:

$\Rightarrow$ lahko vsebuje veliko potomcev.

(**)

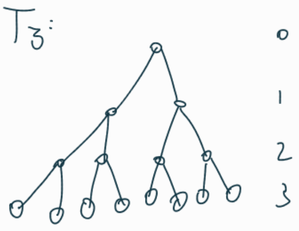
$$\alpha T = I_r = \max \Big\{ 1 + \sum_{\substack{u \\ \text{drugi potomec} \\ r}} I(u),\ \sum_{\substack{u \\ \text{potomec} \\ r}} I(u) \Big\}$$

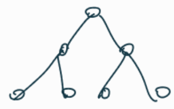
$\Leftarrow$ $O(n)$ algoritem, ki vrne $I(r)$.

Primer: 

$$I(r) = \alpha T = \max \Big\{ 1 + \sum_{\text{upr}} I_u, \sum_{\text{upr}} I_u \Big\} =$$
$$= \max \{1+5,\ 5+5\} = 10$$

Primer: Polna dvojiška drevesa globine n ~ T_n, $n \geq 0$:

T_3: 

T_2: 

T_1: 

T_0: o

označimo $a_n = \alpha T_n$.

$a_0 = 1$
$a_1 = 2$
$a_2 = 5$
$a_3 \overset{?}{=} 10$

IZREK: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, za $n \geq 2$ pa velja:

I.P.: $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1}+1 & ; \; n \text{ sod} \\ 2a_{n-1} & ; \; n \text{ lih} \end{cases}$

... $a_4 = 21$, $a_5 = 42$

odgovor na vprašanje o življenju, vesolju in sploh vsem!

DOKAZ: BAZA: $n=2$, $n=1$

velja:
$a_n \overset{(**)}{=} \max\{1+4a_{n-2}, 2a_{n-1}\} \overset{n \text{ sod}}{=} \max\{1+4\cdot\tfrac{1}{2}(a_{n-1}), 2a_{n-1}\} = \max\{1+2(a_{n-1}), 2a_{n-1}\} = 1+2a_{n-1}$ za sodi n

n sod: $\Rightarrow n-1$ lih. $a_{n-1} \overset{\text{I.P.}}{=} 2a_{n-2}$
$\Rightarrow a_{n-2} = \frac{1}{2} a_{n-1}$

n lih: $\Rightarrow n-1$ sod. $a_{n-1} \overset{\text{I.P.}}{=} 2a_{n-1}+1$
$\Rightarrow a_{n-2} = \frac{a_{n-1}-1}{2}$

$\overset{n \text{ lih}}{=} \max\{1+4\frac{a_{n-1}-1}{2}, 2a_{n-1}\} = \max\{1+2(a_{n-1}-1), 2a_{n-1}\} = \max\{1+2a_{n-1}-2, 2a_{n-1}\} = \max\{2a_{n-1}-1, 2a_{n-1}\} = 2a_{n-1}$. za lihi n.

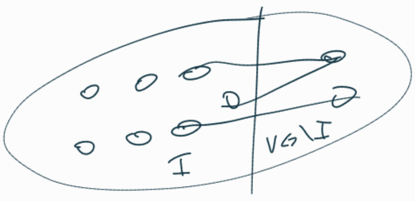
1, 2, 5, 10, 21, 42, ...
v OEIS A000975. $\square$

[DOMINANTNE MNOŽICE]

Def: neodvisna množica I grafa G je maksimalna, če ni vsebovana kot prava podmnožica v neki neodvisni množici grafa G.

Take množice dobimo z navadnim požrešnim algoritmom.

Naj bo I maksimalna neodvisna množica.



vsako vozlišče iz $V(G) \setminus I$ ima soseda iz I.

tedaj je I dominantna množica v G.

$\Rightarrow$ vsaka maksimalna neodvisna množica je DOMINANTNA MNOŽICA.

N.T.S.
a sta ~~takšni~~ zap. v OEIS, ki se ujemata na istih n začetnih, a bijekcija ni dokazana? a imata potem druge A..... številke?