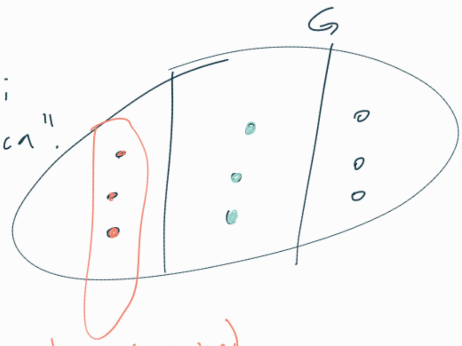
$\chi(G)$

Let $c$ barvanje $G$.

Let $i$ fiksen: $\{u \in VG; c\, u = i\}$ barvni razred




barvni razred

Vsak barvni razred je brez povezav; rečemo, da je „neodvisna množica".

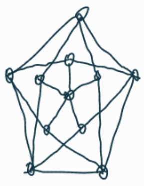
Če $\chi G = k \Rightarrow \chi G \leq k$ (konstruiramo $k$-barvanje) $\wedge$ $\chi G \geq k$ (dokaz, da je to min barvanje)

$\downarrow$ vemo: če ima podgraf $\chi$ $x$, ima graf vsaj $x$ za $\chi$.

Def: klično število grafa $G$, $\omega(G)$, je velikost (|VG|) največjega polnega podgrafa v $G \Rightarrow$ je spodnja meja za $\omega G$.

Posledica: $\forall G \in \mathcal{G}: \chi G \geq \omega G$

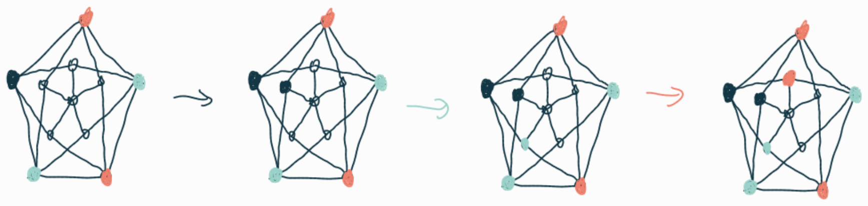
Primer:



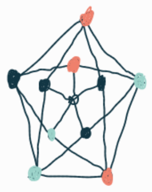
$\omega G = 2$:

$C_5$ je podgraf v $G$, torej $\chi G \geq 3$.

Zaradi simetrije BSS označimo barvanje zunanjega cikla



ups, potrebujemo 4. barvo za sosednje vozlišče!



$\chi G = 4$

Trditev: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists G \in \mathcal{G}: \omega G = 2 \wedge \chi G = n$

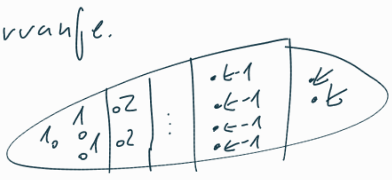
Požrešni algoritem barvanja:

- izberemo poljuben vrstni red vozlišč.
- vozlišča barvamo v tem vrstnem redu.

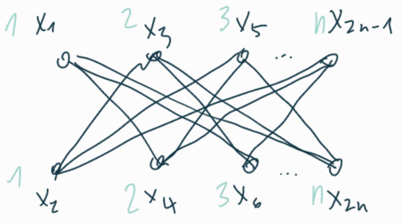
  foreach vozlišča as vozlišče:

  vozlišče pobarvamo z najnižjo možno barvo, torej najmanjša barva, ki še ni uporabljena na njegovih že pobarvanih sosedih.

- ugotovitev: vedno $\exists$ vrstni red vozlišč, da požrešni algoritem vrne barvanje s $\chi G$ barvami: zakaj? Let $\chi G = k$. oglejmo si neko optimalno barvanje.




Primer: $K_{n,n}$ brez popolnih povezav.




požrešno barvanje v zaporedju $(x_1, \dots, x_{2n})$

toda $\chi G = 2$ — bipart.!

Trditev: $\forall G \in \mathcal{G}: \chi G \leq \overbrace{\Delta G}^{\text{največja stopnja grafa}} + 1$

tzb $\chi G$ je kvečjemu 1 večji od največje stopnje.

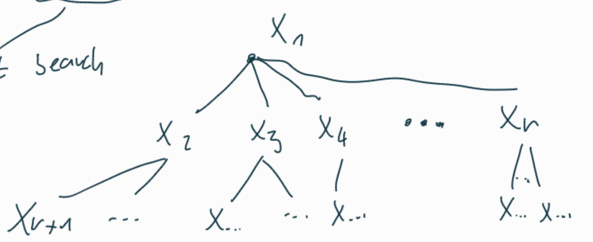
Dokaz: $x_1, \dots, x_n$ poljuben vrstni red. Poženimo požrešni algoritem.

- na i-tem koraku barvamo $x_i$. Tedaj je kvečjemu $\underbrace{\deg_G x_i}_{\leq \Delta G}$ barv, ki niso na razpolago. zato $\exists$ v množici z moči $\Delta G + 1$ gotovo prosta barva za $x_i$

celo več: $G$ ni regularen $\rightarrow \chi G \leq \Delta G$ (brez +1) (*)

Dokaz: let $x \in VG$ in $\deg_G x \underset{\text{strogo}}{<} \Delta G$. obstaja, ker $G$ ni regularen.
naredimo BFS drevo iz tega $x$:

breadth first search

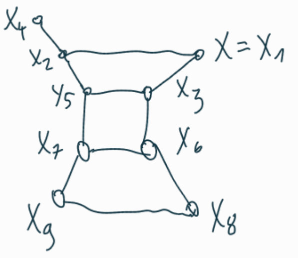



sosedje od $x_1$

sosedje sosedov od $x_1$, ki sami niso sosedje $x_1$

. . . itd

Primer:




sedaj požrešni algo. poženemo v obratnem vrstnem redu, kot so vozlišča v tem drevesu indeksirana.

$i > 1$

k. barvamo $x_i$ glede na konstrukcijo vsaj en njegov sosed še ni pobarvan. v množici $\{1 .. \Delta G\}$ je vsaj ena prosta barva za $x_i$.
edina težava je $i = 1$: vsi njegovi sosedi so pobarvani, toda $\deg_G x_1 < \Delta G$, zato tudi zanj $\exists$ barva $\in \{1 .. \Delta G\}$.

Primera: 1. $K_n$: $\chi K_n = n = \Delta \underbrace{K_n}_{\text{regularen}} + 1$

2. $C_{2k+1}$, $k \geq 1$: $\chi C_{2k+1} = 3 = \Delta \underbrace{C_{2k+1}}_{\text{regularen}} + 1$

natančneje:

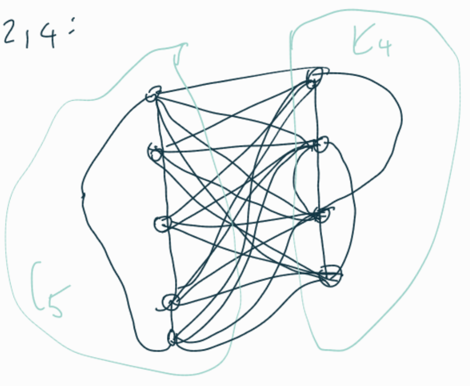
Izrek (Brooks): $G$ povezan, $G$ ni niti poln graf niti lihi cikel $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \chi G \leq \Delta G$. (posplošitev izreka (*)) Dokazali ne bomo.

Izrek: let $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$ zaporedje stopenj grafa $G$. uredimo vozlišča po stopnji. tedaj velja, da je $\chi G \leq 1 + \max_{i=1}^{n} (\min\{d_i, i-1\})$

Dokaz: Poženimo požrešni algoritem v vrstnem redu, ki ustreza tej po stopnjah padajoči ureditvi vozlišč. Oglejmo si $i$-ti korak – barvamo vozlišče stopnje $d_i$. takrat imamo na razpolago vsaj eno barvo $\in \{1 .. d_i + 1\}$.
Dotlej smo pobarvali $i-1$ vozlišč, zato imamo na razpolago tudi vsaj eno barvo iz $\{1 .. i\}$. zato požrešni algoritem to vozlišče pobarva z barvo $\leq \min\{i, d_i + 1\}$. Največja uporabljena barva $k$ je $\leq \max_{i=1}^{n} (\min\{d_i + 1, i\})$.
torej $\chi G \leq k \leq 1 + \max_{i=1}^{n} (\min\{d_i, i-1\})$. □

Primer: $G_{r,s}$, $r \geq 1$, $s \geq 3$: disjunktna unija $C_{2r+1} \cup K_s$ in dodamo vse povezave med njima.

skica $G_{2,4}$:




$\Delta G_{r,s} = s - 1 + 2r + 1 = 2r + s$

Po Brooksu je $\chi G_{r,s} \leq \Delta G_{rs} = 2r + s$

sedaj uredimo stopnje $G_{r,s}$: $\overbrace{2r+s}^{s\text{-krat}}, \dots, \overbrace{s+2}^{2r+1\text{-krat}}$

če $i \leq s$: $\min\{d_i, i-1\} \leq s - 1$

če $i \geq s$: $\min\{d_i, i-1\} \leq s + 2$

$\Rightarrow$ torej $\max_{i=1}^{n} (\min\{d_i, i-1\}) \leq s + 2 \Rightarrow \chi G_{r,s} \leq 1 + (s+2) = s + 3$

za velike $r$ je $s+3 << s+2r$.

Dejansko $\chi G_{r,s}$ je: • $K_s$ podgraf: $s$ barv

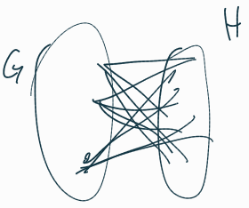
$C_{2r+1}$ podgraf: dodatne 3 barve,

$(\Rightarrow)$ $s+3$ skupaj barv

$= \chi G_{r,s} = s+3$

Def.: spoj dveh grafov $G$ in $H$ je graf, ki ga dobimo iz disjunktne unije $G$ in $H$ tako, da dodamo vse možne povezave med $G$ in $H$.

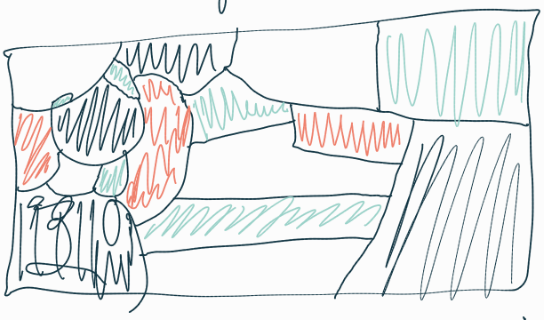
oznaka: $G \oplus H$:




od prej: $G_{r,s} = C_{2r+1} \oplus K_s$

Trditev: $\chi(G \oplus H) = \chi G + \chi H$

Problem 4 barv: zemljevid.

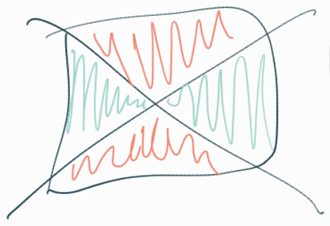


a vedno zadoščajo 4 barve?

koliko barv potrebujemo?

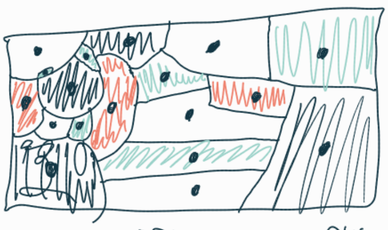
sosednji območji ne smeta imeti iste barve.

da sta sosednji, morata imeti pozitivno dolžino meje $\neq 0$



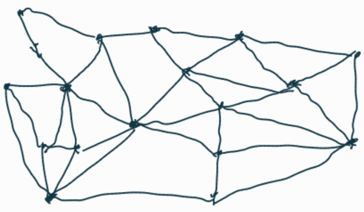
je ok.

zemljevid kot graf:



vozlišča v fläche

$\rightarrow$



povezave so meje

$\Downarrow$

ravninski graf.

problem 4 barv: a velja $G$ ravninski $\Rightarrow \chi G \le 4$?

izrek 4 barv: ja.

Dokazali bomo za 5 barv.

TRDITEV. Vsak ravninski graf premore vozlišče stopnje $\le 5$.

Dokaz: let $G$ ravninski.

RAAPDD $\deg_G(u) \ge 6 \quad \forall u \in VG$.

rokovanje $\sum_{u \in VG} \deg_G u = 2|EG| \ge \sum_{u \in VG} 6 = 6|VG|$

$|EG| \ge 3|VG|$

če je $|VG| \ge 3 \Rightarrow$

$|EG| \le 3|VG| - 6$ $\rightarrow$ protislovje

za $|VG| < 3$ očitno ✗

TRDITEV: $G$ ravninski $\Rightarrow \chi G \le 5$

DOKAZ Z INDUKCIJO po številu vozlišč

baza: $|VG| \le 5$ ✓

korak: $G$ ravninski graf, $|VG| \geq 6$

izberimo $u \in G$, $\deg_G u \leq 5$ (obstaja po prejšnji trditvi)

let $H := G - u$. $|VH| < |VG|$

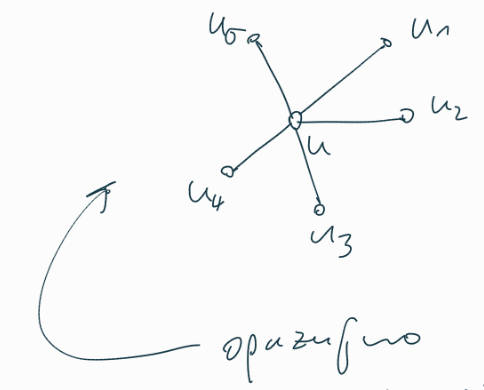
$H$ ravninski. Po I.P. ga lahko pobarvamo s petimi barvami.

let $c$ barvanje $H$ s petimi barvami.

case $\deg_G u \leq 4$:

(**) pobarvamo $G$ kot $H$ in $u$ ima itak le $\leq 4$ sosede ✓

case $\deg_G u = 5$: let $u_1, \dots, u_5$ sosedje $u$

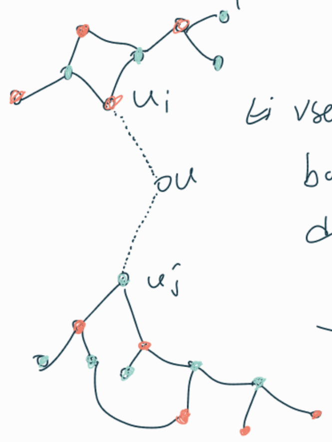



(***) če $\exists\, i,j \in \{1..5\}, i \neq j \ni$: $c\,u_i = c\,u_j$, potem lahko $G$ pobarvamo kot (**). ✓

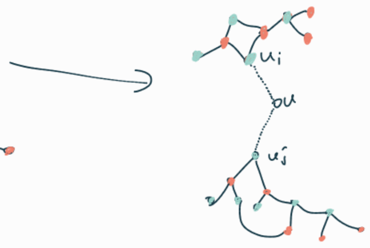
če ne, pa BSŠ: $c(u_i) = i$

opazujmo vložitev $G$ v ravnino:

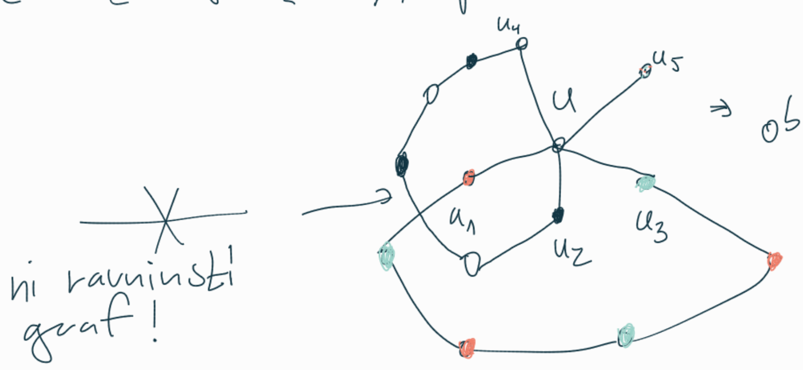
Za vsak $i,j \in \{1..5\}, i \neq j$ naj bo $H_{ij}$ inducirani podgraf, ki ima le vozlišča barv $i$ in $j$. če obstajata taka različna $i,j$, da sta $u_i$ in $u_j$ v različnih komponentah $H_{ij}$




tedaj v komponenti, ki vsebuje $u_i$, zamenjamo barvi $i$ in $j$ in dobimo spet dobro barvanje. v tem barvanju $c'$ imata dva soseda $u$ isto barvo $\Rightarrow$ (***) ✓




če ne ($\forall i,j \in \{1..5\}, i \neq j$: $u_i$ in $u_j$ v isti komponenti $H_{ij}$):




$\rightarrow$ obstaja $u_i, u_j$-pot

skiciramo poti

$u_1, u_3$ in $u_2, u_3$

$i=1$ $i=3$ $\quad$ $i=2$ $j=4$

□

BARVANJE POVEZAV

povezavi s skupnim krajiščem dobita isti barvi.

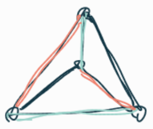
$c: EG \longrightarrow \{1..k\}$ $\ni$:

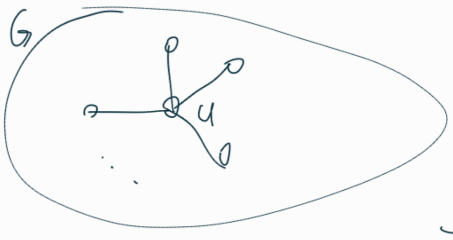
$uv, uw \in EG \Longrightarrow c(uv) \neq c(uw)$

zopet nas zanima najmanjši $k$, za katerega $\exists$ $k$-barvanje povezav grafa $G$. to je „kromatični indeks grafa $G$", označen z $\chi'(G)$

Primer: $\chi' C_n = \begin{cases} 2 \,; & n \text{ sod} \\ 3 \,; & n \text{ lih} \end{cases}$

$\chi' C_3 = 3 = \chi' K_3 = \chi' K_4$






$\forall u \in V G$:
$\chi' G \geq \deg_G u$

torej: $\chi' G \geq \Delta G$

Izrek (Vizing): $\forall G \in \mathcal{G} : \Delta G \geq \chi' G \geq \Delta G + 1$

ne bomo dokazali

torej: $\chi' G \in \{\Delta G, \Delta G + 1\}$

Def.: Graf $G$ je razreda I, če je $\chi' G = \Delta G$ in
razreda II, če je $\chi' G = \Delta G + 1$

„Katerega razreda je dan graf?" je NP-poln problem

Primeri: $C_{2n}$ so razreda I
$C_{2n}$ so razreda II
$K_3$ je razreda II
$K_4$ je razreda I

Prihodnjič:
- $K_{2k+1}$ razreda II
  $K_{2k}$ razreda I
- dvodelni grafi so razreda I