RAVNINSKI GRAFI

[zamudil 10 minut]

TRDITEV: če je G ravninski graf vložen v ravnino, potem velja

$$\sum_{F \in F(G)} \ell(F) = 2|E(G)|$$

↳ lica ↳ dolžina lica

spomnimo: ožina grafa G, $g(G)$, je dolžina najkrajšega cikla v G. Če G cikla nima, rečemo $gG = \infty$

let $F \in FG$: $\ell F \geq gG$

$$2|EG| = \sum_{F \in FG} \ell F \geq \underbrace{\sum_{F \in FG}}_{\text{samo za štetje}} gG = gG\,|FG|$$

Posledično:

če je G ravninski graf z vsaj enim ciklom in je vložen v ravnino, je

$$|EG| \geq \frac{gG}{2}|FG| \quad (*)$$

IZREK: (Eulerjeva formula) — tisto iz poliedrov: ploskve, robovi, oglišča

če je G ravninski vložen v ravnino, potem velja

$$|VG| - |EG| + |FG| = 1 + \Omega G$$

Primer: G:

$15 - 18 + 7 = 1 + 3$

tabaaasay kavnc

Dokaz: G povezan (indukcija po EG)

krajše označimo
- $VG = n$
- $EG = m$
- $FG = f$

NTS MAq.co.SPR

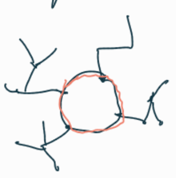
BAZA: $m = n - 1$ (da je povezan)

tedaj je g drevo in $f = 1$.

$n - (n-1) + 1 = 2$ formula velja

KORAK: let $m \geq n$ Tedaj G ni drevo.

V ravninski risbi izberemo lice F_1 omejeno s ciklom



let e povezava na tem ciklu. odstranimo jo.

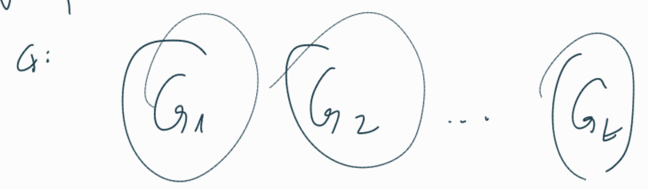
let $H = G - e$. za H mora veljati eulerjeva formula po I.P.

H je še vedno povezan. n, m, f glede na G.

$n - (m-1) + (f-1) = 2$, $n - m + f = 2$

Tu vse je bilo za povezan ravninski graf.

sedaj pa let G nepovezan in let $G_1, \dots, G_k$ komponente G-ja.



označimo $n_i = |VG_i|$ $\forall i \in [1,k]$
$m_i = |EG_i|$
$f_i = |FG_i|$

po že dokazanem vemo, da je $n_i - m_i + f_i = 2$ $\forall i \in [1,k]$

za G: $n - m + f = n_1 + \dots + n_k - (m_1 + \dots + m_k) + f_1 + \dots + f_k - \underbrace{(k-1)} =$

ker bi drugače zunanje lice šteli prevečkrat

$$= \overbrace{(n_1 - m_1 + f_1)}^{2} + \dots + \overbrace{(n_k - m_k + f_k)}^{2} - (k-1) =$$

$$= 2k - k + 1 = k + 1 = \Omega G + 1$$

velja tudi za nepovezane grafe: ✓

eulerjeva formula za povezane ravninske grafe:

$|VG| - |EG| + |FG| = 2$

$|FG| = 2 - |VG| + |EG|$: število lic v ravninskem grafu je invariantno za vložitev v ravnino.

$$2 = |VG| - |EG| + |FG| \le |VG| - |EG| + \frac{2|EG|}{gG}$$

$$|FG| \le \frac{2|EG|}{gG} \quad (*)$$

$$|EG|\left(\frac{2}{gG} - 1\right) \ge 2 - |VG|$$

$$|VG| - 2 \ge |EG|\left(2 - \frac{2}{gG}\right)$$

$$|VG| - 2 \ge |EG|\left(\frac{gG-2}{gG}\right)$$

Posledica: G ravninski graf vložen v ravnino z vsaj enim ciklom

$\Longrightarrow$

$$|EG| \le \frac{gG}{gG-2}(VG - 2)$$

Posledica posledice: G ravninski graf, $|VG| \ge 3 \Longrightarrow$

$$|EG| \le 3|VG| - 6 \quad (**)$$

DOKAZ:
case G drevo: $|EG| = |VG| - 1 \overset{?}{\le} 3|VG| - 6$
$\Leftrightarrow$ $2|VG| \ge 5$ velja, ker $|VG| \ge 3$ iz predp.

case G ima cikel: $|EG| \le \frac{gG}{gG-2}(|VG| - 2)$ v skrajnem primeru $gG = 3$:
$|EG| \le \frac{3}{1}(|VG| - 2) = 3|VG| - 6$

POSLEDICA: G nima 3kotnika a ima cikel
$|EG| \leq 2|VG| - 4$ (gG vsaj 4)

POSLEDICA: G ravninski graf z vsaj 3 vozlišči brez 3kotnikov; (***)
$$|EG| \leq 2|VG| - 4$$

KOMBINATORIČNI DOKAZ, DA K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska:

DOKAZ K_5 je ravninski. Tedaj bi veljalo

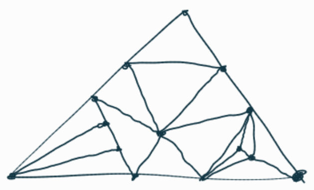
K_5

$$|EG| \leq 3|VG| - 6 \quad (**)$$
$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$$
$$10 \leq 9 \quad \text{✗} \quad \text{ni ravninski}$$

DOKAZ $K_{3,3}$ je ravninski. TBV (***)

$$|EG| \leq 2|VG| - 4$$
$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$$
$$9 \leq 8 \quad \text{✗} \quad \text{ni ravninski}$$

TRIANGULACIJA je ravninski graf, vložen v ravnino tako, da so vsa lica omejena s ciklom C_3:



G je maksimalen ravninski graf, če ni pravi vpet podgraf nekega ravninskega grafa.
zdb v G ne moremo dodati povezave, da bi ostal še tem ravninski.

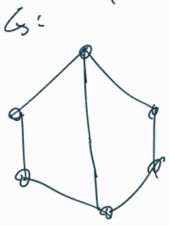
primer: $K_5 - e$ je maksimalen ravninski graf $\forall e \in EK_5$

$K_5 - e$:

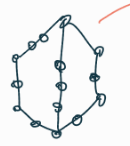
TRDITEV: Let ravninski graf G, vložen v ravnino.
NTSE
1.) G je triangulacija
2.) G je maksimalen RG
3.) $|EG| = 3|VG| - 6$

Subdivizija grafa G je graf, ki ga dobimo iz G tako, da povezave nadomestimo z disjunktnimi potmi:

G:



subdiv G:



Lahko tudi dodamo 0 novih vozlišč na povezavo.

očitno: G ravninski $\iff$ vsaka subdivizija G ravninska

⟹ vložena subdivizija $K_{3,3}$ in K_5 ni ravninska.

Izrek: (Kuratowski)

Graf G je ravninski ⟺ ne vsebuje subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$

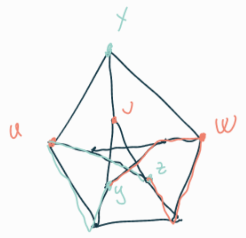
Dokaz: (⟹) očitno

(⟸) preveč zahteven dokaz

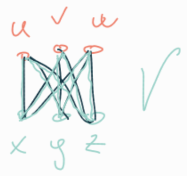
Ravninskost G dokažemo z risbo

Neravninskost G dokažemo tako, da najdemo v njem subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$.

Primer 1: Petersenov ni ravninski:

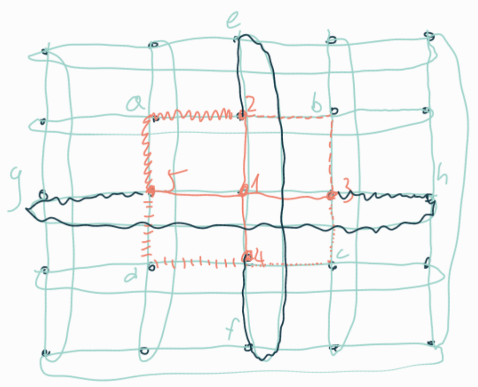


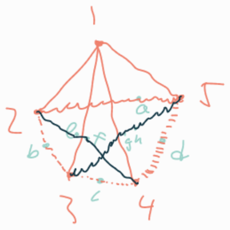
iščemo



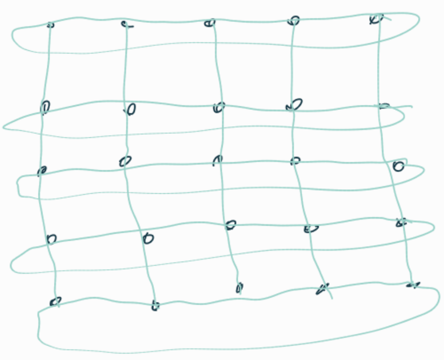
Primer 1,5: $C_4 \square C_4 = (K_2 \square K_2) \square (K_2 \square K_2) = Q_4$

Primer 2 $C_5 \square C_5$ ni ravninski

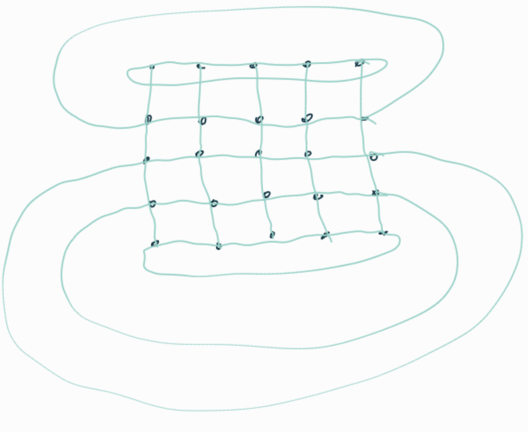




Primer 3: $P_5 \square C_5$ je ravninski



↓ risba



ali pa upload.4a.si/a/5g.jpg

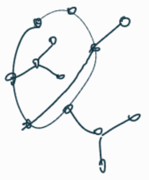
izrek: (Wagner)

G je ravninski $\iff$ niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista njegova minorja.

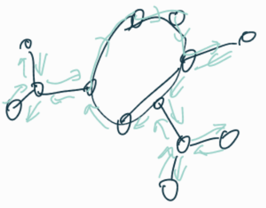
Primer: K_5 je minor Petersenovega grafa

↳ krčenje in odstranjevanje vozlišč in povezav

Def: Ravninski graf G je zunanje-ravninski graf, če $\exists$ njegova risba v ravnini, v kateri so vsa vozlišča na robu zunanjega lica.

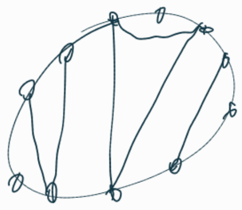
 je zunanje-ravninski

S



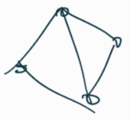
TRDITEV:

Če je G zunanje-ravninski in 2-povezan, v risbi, kjer so vsa vozlišča na zunanjem licu, vozlišča določajo vpet cikel



DOKAZ: obhodimo zunanje lice, s čimer po def. dosežemo vsako vozlišče, če bi katero vozlišče obiskali 2x, bi bilo prerezno, torej vsako obiščemo le enkrat

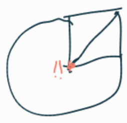
2 povezan zunanjeravninski graf je Hamiltonov.

Primer: $K_{2,3}$ ni zunanje-ravninski: 

- je 2 povezan
- toda ni hamiltonov CRK

Primer: K_4 ni zunanje-ravninski:

- 3-povezan ⇒ 2-povezan
- hamiltonov
- ne moremo najti take risbe CRE



TRDITEV: Zunanje-ravninski graf na vsaj 2 vozliščih ima vozlišče stopnje ≤ 2.

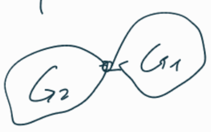
DOKAZ: $|VG| \leq n$

- $n \leq 4$: podgraf $K_4 - e$

I.P.: $n \geq 4 \Rightarrow G$ vsebuje vsaj 2 vozlišči stopnje ≤ 2

BAZA: $n = 4$

KORAK: najprej case u ima prerezno vozlišče:

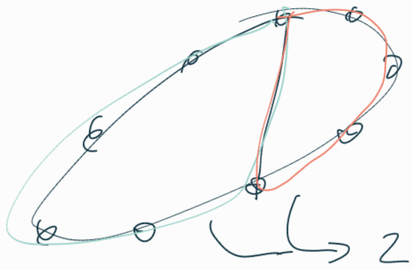


✓

case G 2-povezan:

case G cikel: ✓

case G ni cikel: ima vsaj eno diagonalo

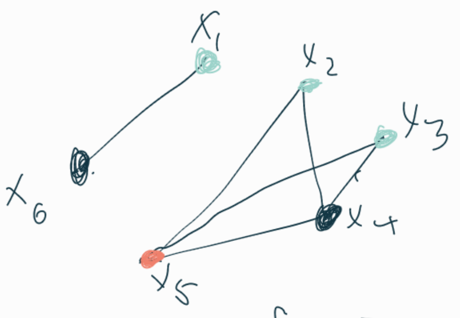


→ 2 zunanje ravninska grafa ⇒ apply I.P.

~ BARVANJE GRAFOV ~

čemu? Tovarna proizvaja kemikalije $x_1, \dots, x_r$. Nekateri pari $\{x_i, x_j\}$ medsebojno reagirajo, zato morajo biti skladiščeni na različnih lokacijah. Koliko najmanj lokacij potrebujemo za skladiščenje teh kemikalij

naj bodo te povezave grafa z vozlišči



let G graf. $c: V(G) \to [1..k]$ je dobro barvanje G,

če velja $\{u,v\} \in EG \Rightarrow c(u) \neq c(v)$

natančneje: c je k-barvanje grafa G.

Kromatično število $\chi(G)$ je najmanjši k, za katerega najdemo k-barvanje G.

mali X iz TeX

Primer: najmanjše št. časovnih intervalov semaforiziranega križišča

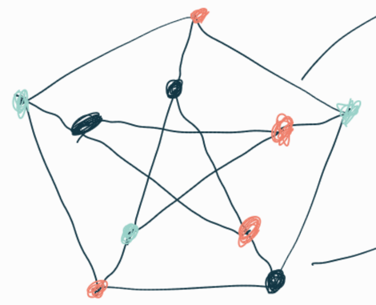
Primer: $\chi(K_n) = n$ $\left(\chi(G) \leq |VG|\right)$

ni poln

poln graf

Primer: $\chi(C_n) = \begin{cases} 2; & n \text{ je sod} \\ 3; & n \text{ je lih} \end{cases}$

Primer: Petersenov graf:



5 cikel — 3 barve

$\chi C_5 = 3$

$\chi P \leq 3$

$\chi P = 3$

TRDITEV: če je H podgraf grafa G, je
$\chi G \geq \chi H$ (očitno)