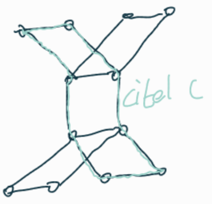
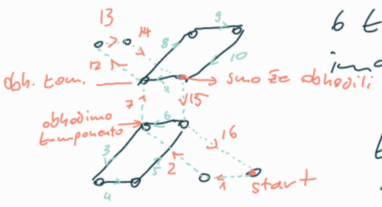
DS2 PFMF 2024-03-28

... eulerjev graf premore eulerjev obhod.

Primer:



Poglejmo $H := G \setminus E(C)$:



6 komponent, vsaka ima eulerjev obhod.

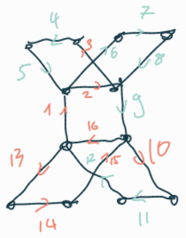
konstruirali smo eulerjev obhod.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16.

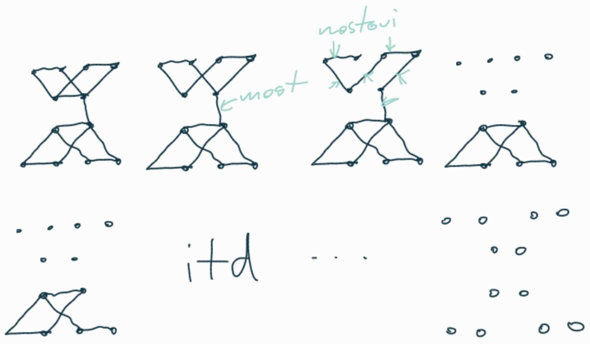
vsa vozlišča so sode stopnje.

Fleury-jev algoritem za iskanje eulerjevega obhoda v eul. grafu
- začnemo v poljubni povezavi.
- ko povezavo prehodimo, jo izbrišemo
- postopek nadaljujemo in pri tem pazimo le na to, da greno na most le v primeru, če ni druge možnosti.
  ↳ glede na trenutni graf, v ~~katerem~~ katerem je nekaj povezav že odstranjenih

Izrek F.A.: če je G eulerjev graf, potem Fleuryjev algoritem vrne eulerjev obhod. Vhod algoritma je eulerjev graf, izhod pa njegov eulerjev obhod

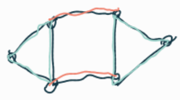


ni most
most

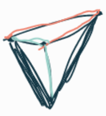


Def.: Dekompozicija grafa je razdelitev na podgrafe, kjer se vsaka povezava pojavi natanko v enem podgrafu.

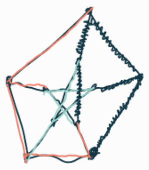
Primeri:



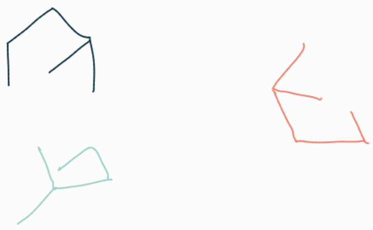
dekompozicija na 2 podgrafa



dekompozicija K_4 v tri kopije P_3



dekompozicija na 3 podgrafe



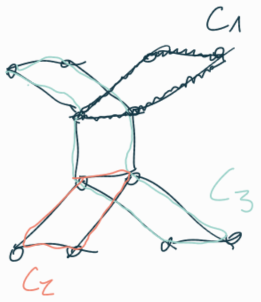
izomorfni so si

dekompozicija je lepa, ko je sestavljena iz samih medsebojno si izomorfnih podgrafov.

TRDITEV: vsak eulerjev graf premore dekompozicijo v cikle.

DOKAZ: G eulerjev. Izberemo cikel (obstaja), ga odstranimo. Dobljene komponente so manjši eulerjevi grafi, ki po indukciji premorejo dekompozicijo na cikle.

f&q ... na manjše eulerjeve grafe, ki premorejo indukcijo po dekompoziciji



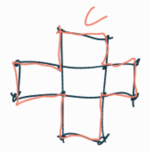
HAMILTONOVI GRAFI

Def: Hamiltonov cikel v grafu je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. Graf je Hamiltonov, če premore Hamiltonov cikel.

ekvivalentna def: Hamiltonov cikel je vpet podgraf, ki je cikel.

Hamiltonova pot v grafu je pot, ki vsebuje vsa vozlišča grafa $\equiv$ vpet podgraf, ki je pot.

Primeri:



graf je hamiltonov

ta graf je tudi eulerjev.

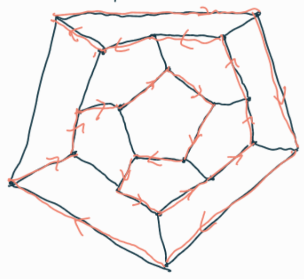
K_n premore veliko Hamiltonovih ciklov.

toliko

$(n-1)(n-2)(n-3)\cdots = (n-1)!$

Platonova telesa (5) so edina telesa v prostoru, ki imajo vse ploskve enake.

Dodekaeder ima za ploskve petkotnike. Njegov graf:



Hamiltonov cikel

- Ali je graf G Hamiltonov?
- Poišči hamiltonov cikel grafa!

} nepolinomsko kompleksna postopka

IZREK: potrebni pogoj za H. G.

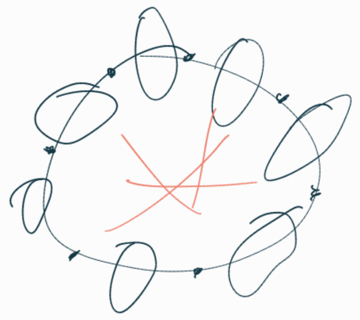
Naj bo G hamiltonov graf in $S \subseteq V(G)$. Tedaj je $\Omega(G-S) \leq |S|$

DOKAZ: $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ BSS naj bo $v_1 \to \dots \to v_n \to v_1$ hamiltonov cikel.

del neke komponente:

G−S

če sta $v_i, v_j \in S$, $i < j-1$, in $v_{i+1}, \dots, v_{j-1} \notin S$, tedaj so $v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$ del neke komponente v $G-S$



v splošnem primeru, če ni takih povezav, je še vedno št. komponent enaka $|S|$

tu $= 5$

očitno je hamiltonov graf povezan.

izrek uporabimo v kontrapoziciji:

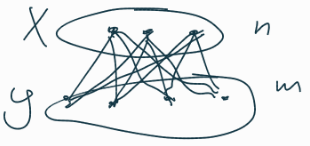
$\exists S \subseteq V(G): \Omega(G-S) > |S| \Rightarrow G$ ni hamiltonov.

Primer: 1) če G vsebuje prerezno vozlišče, tedaj G ni hamiltonov.

Dokaz: naj v prerezno vozlišče. Naj $S = \{v\}$.

$\underbrace{\Omega(G-S) \geq 2}_{\text{prerezno vozlišče}} > |S| = 1 \Rightarrow G$ ni hamiltonov.

2.) $K_{n,m}$ (poln dvodelni graf):



$n<m$

$\| \quad\quad \|$

$|X| \quad |Y|$

izolirana vozlišča

vzemimo $S=X$: $\Omega(G-\underset{X}{S})=m>n=|\underset{X}{S}| \Rightarrow K_{n,m}$ ni hamiltonov

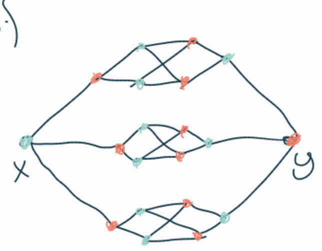
Če pa $m=n$, pa je hamiltonov:

H.C. v $K_{4,4}$

TRDITEV: $K_{m,n}$; $m,n\geq 2$, je hamiltonov $\Leftrightarrow n=m$

SPLOŠNEJE: G dvodelen z razdelitvijo (X, Y) in $|X|\neq|Y| \Rightarrow$ G ni hamiltonov.

3.)

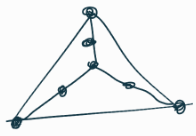


Je bipartiten in $|\cdot|=|\cdot|$, a vendar

$S=\{x,y\}$

$\Omega(G-S)=3>|S|=2 \Rightarrow$ ni hamiltonov

4.)



velja: $S\subseteq V(G) \Rightarrow \Omega(G-S)\leq|S|$

↳ preverimo vse možnosti z brute force ⇒ graf zadošča pogoju za hamiltonskost, toda ni hamiltonov graf.

IZREK: zadostni pogoj za hamiltonskost grafa:

G graf, $|V(G)|\geq 3$, v katerem za vsak par nesosednjih vozlišč u,v velja $\deg(u)+\deg(v)\geq|V(G)| \Rightarrow G$ hamiltonov.

(Orejev izrek)

DOKAZ Ore-jevega izreka: z metodo najmanjšega protiprimera:

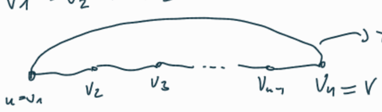
RAAPDD izrek ne velja. Torej $\exists G$, da predpostavka velja, zaključek pa ne. Med vsemi takimi grafi (protiprimeri) izberemo tiste z najmanj vozlišči, izmed njih pa enega izmed tistih, ki imajo največ povezav, in ga fiksiramo naj bo to graf G. Zanj velja:

- ○ $\forall u,v\in V(G)$ in $\{u,v\}\notin E(G) \Rightarrow \deg u+\deg v\geq|V(G)|$
- G ni hamiltonov ⇒ G gotovo ni polni graf ⇒ v G obstajata nesosednji vozlišči u,v

poglejmo H; $V(H):=V(G)$ in $E(H):=E(G)\cup\{u,v\}$

za H še vedno velja ○, zaradi izbire G (največ povezav), H ni protiprimer za izrek, zato je H hamiltonov. V H vsak hamiltonov cikel vsebuje $\{u,v\}$, sicer bi tak Ham. cik. že bil v grafu G.

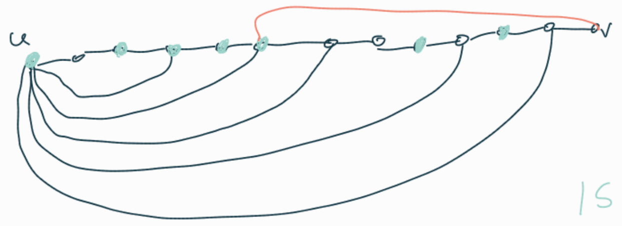
let $u=v_1\to v_2\to\dots\to v_n=v\to u$ hamiltonov cikel v H.



→ ta povezava je v H, ne pa v G

upeljimo množici $S=\{v_i ; \{u,v_{i+1}\}\in E(G)\}$ ~ predhodniki sosedov u na hamiltonski poti v G

$T=\{v_i ; \{v,v_i\}\in E(G)\}$ ~ sosedje v



S:

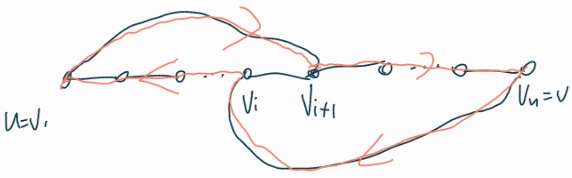
$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$ → po predpostavki

$|S \cup T| + |S \cap T| = \underbrace{|S|}_{\deg_G(u)} + \underbrace{|T|}_{\deg_G(v)} \geq n = |V(G)|$

$v_n \notin S$
$v_n \notin T$ $\Rightarrow |S \cup T| \leq n-1 \Rightarrow S \cap T \neq \emptyset$, $|S \cap T| \geq 1$

vsaj en element je izven unije

v ima soseda iz S.
→ v_i



našli smo hamiltonov cikel v grafu G

Posledica: Diracov izrek:
G graf, $|V(G)| \geq 3$; $\forall u \in V(G): \deg_G(u) \geq \frac{|V(G)|}{2} \Rightarrow G$ hamiltonov

Dokaz: u, v poljubni $\in V(G) \Rightarrow \deg_G(u) + \deg_G(v) \geq \frac{V(G)}{2} + \frac{V(G)}{2} = V(G)$

Orejev izrek.

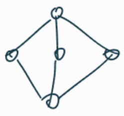
7. POGLAVJE: RAVNINSKI GRAFI

Def.: G je ravninski ⇔ lahko ga narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne križata.

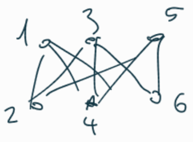
Ravninski graf skupaj z ustrezno risbo v ravnini je graf, vložen v ravnino.

Primer: $K_{2,3}$ je ravninski:

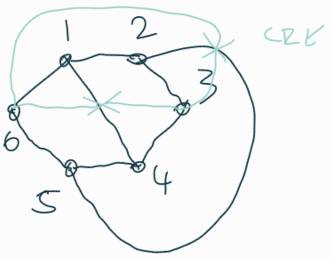
njegova vložitev v ravnino je npr.:



$K_{3,3}$ ni ravninski:



ima cikel:



ne križa same sebe

Izrek (Jordan): Sklenjena enostavna krivulja v ravnini razdeli ravnino v notranjost, zunanjost in krivuljo samo.

Def.:
let G ravninski graf, vložen v ravnino. Tedaj sklenjena območja v ravnini, dobljena tako, da iz risbe odstranimo točke, ki ustrezajo vozliščem in povezavam, imenujemo lica vložitve.

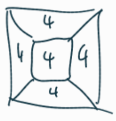
OZNAKA: F(G) … množica lic vložitve

$|F(G)| = 6$

zunanje / neomejeno lice

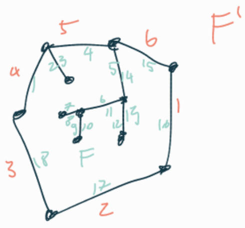
OPOMBA: G lahko vložimo v ravnino ⇔ lahko ga vložimo na sfero

Def.: Dolžina lica F – $\ell(F)$, je število povezav, ki jih prehodimo, ko obhodimo lice.



4

Vsako drevo je ravninski graf. ima eno lice, katerega dolžina je $2|E(T)|$.



$\ell(F) = 15$

$\ell(F') = 6$