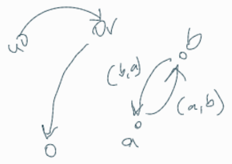
Razširitve/inačice koncepta grafa

- neskončni grafi
- dovoljene večkratne povezave med vozlišči in zanke

- usmerjeni grafi ali digrafi: tu so v množici povezav urejeni pari vozlišč $(u,v) \in E$



navaden graf je torej digraf z „loki v obe smeri"

povezavam v digrafu pravimo loki

v digrafu ločimo vhodno in izhodno stopnjo vozlišča

- omrežje: (G, w)

graf ali digraf; preslikava: $E(G) \to \mathbb{R}$ (uteži)

lahko dodamo še $w': V(G) \to \mathbb{R}$

↳ podatki na vozliščih

2. POTI, CIKLI, POVEZANOST.

$G = (V(G), E(G))$. sprehod v G je zaporedje vozlišč $v_0, \dots, v_k$, tako da je $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ $\forall i \in \mathbb{Z}_k$. k je vsaj 0. (eno vozlišče)

dolžina sprehoda je število prehojenih povezav (k iz zgornje def.)

sprehod je sklenjen, če je $v_0 = v_k$.

sprehod je enostaven, če so vsa vozlišča različna, razen v_0 in v_k, torej je lahko sprehod sklenjen in enostaven hkrati.

TRDITEV: če v grafu $\exists$ sprehod med dvema vozliščema, potem med njima obstaja tudi enostaven sprehod.

DOKAZ: let Q sprehod med u in v. če je enostaven, je najden. če ni enostaven, se ponovita vsaj dve vozlišči: $u, \dots, x, \dots, x, \dots, v$. sprehodu priredimo Q', ki odstrani pot od prvega do zadnjega pojavljenega vozlišča x: $u, \dots, x, \dots, v$. odstranimo „cikel" iz poti. če je Q' enostaven, je iskani, sicer postopek ponovimo. v končno korakih se postopek ustavi, ker na vsakem koraku za vsaj 2 zmanjšamo dolžino sprehoda.

POT V GRAFU je podgraf, ki je enostaven sprehod med dvema vozliščema. To je graf pot (P_n)

CIKEL V GRAFU je podgraf, ki je enostaven sklenjen sprehod dolžine vsaj 3.

TRDITEV: če med dvema vozliščema grafa $\exists$ dve različni poti, potem graf premore cikel.

DOKAZ: let P in P' dve različni poti od u do v. let x zadnje vozlišče, ki je skupno P in P'. x je lahko u. (↳ gledano po poti $u \to v$) naj bo y prvo naslednje vozlišče za x, ki je na P in P'.

unija podpoti P od x do y in podpoti P' od x do y določa iskani cikel v grafu.

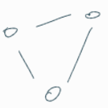
Poti sta različni, če sta množici vozlišč poti različni.

TRDITEV: če graf premore sklenjen sprehod lihe dolžine, potem premore tudi cikel lihe dolžine.

DOKAZ: z indukcijo po dolžini sprehoda. let $m :=$ dolžina sprehoda.

BAZA: $m=3$ (najmanjši sklenjen lihi sprehod)

to je cikel dolžine 3



KORAK $m \geq 5$: let Q poljuben sklenjen sprehod dolžine $m \geq 5$.
če je Q enostaven, je cikel po definiciji. če ni, se vsaj eno vozlišče na tem sprehodu vsaj ponovi:

$$u, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m$$

$$x_i = x_j$$

poglejmo $\underbrace{x_i, \ldots, x_j = x_i}_{Q'}$ in $\underbrace{u, x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_m = u}_{Q''}$

Q' in Q'' sta sklenjena sprehoda z dolžinama m' in m''.
po povezavah sta sprehoda disjunktna. To pomeni, da je
$m = m' + m''$. m lih $\Rightarrow$ m' lih XOR m'' lih.

BŠS m' je lih. $m' < m$. po I.P. m' vsebuje lih cikel.

POVEZANOST: DEF: let G graf. vozlišči u in v sta v isti (povezani) komponenti, če obstaja sprehod/pot med njima v G.

število komponent G označimo z $\Omega(G)$.

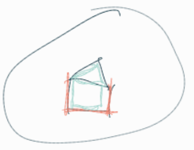
OP.: biti v isti komponenti je ekvivalenčna relacija.

DOKAZ:
- refleksivnost: v je povezano s seboj s sprehodom dolžine 0.
- simetričnost: očitno če obstaja sprehod $u \to v$ obstaja tudi sprehod $v \to u$.
- tranzitivnost: sprehoda $u \to v$ in $v \to w$ tvorita sprehod $u \to w$.

Graf G je povezan, če je $\Omega(G) = 1$.

G $\quad \Omega(G) = 3$

komponenta je maksimalen (glede na vsebovanost) podgraf, ki je povezan.



RAZDALJE V GRAFIH

$d_G(u,v)$ je dolžina najkrajšega sprehoda/poti med u in v.

če sta u, v v različnih komponentah, označimo $d_G(u,v) = \infty$
razdalje ponavadi gledamo le med vozlišči na isti komponenti.

$(V(G), d_G)$ je metrični prostor.

spomnimo def. metrični prostor.

METRIČNI PROSTOR je množica A in preslikava: $A \times A \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
veljati morajo tudi 3 aksiomi:
1.) nenegativnost preslikave f
1.5.) $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
SIMETRIČNOST 2.) $f(x,y) = f(y,x)$
TRIKOTNIŠKA NEENAKOST 3.) $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$

PREMER GRAFA: $\mathrm{diam}(G) := \max\{d_G(u,v);\ u,v \in V(G)\}$

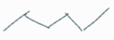
EKSCENTRIČNOST VOZLIŠČA: $\mathrm{ecc}(u) := \max\{d_G(u,x);\ x \in V(G)\}$

$\operatorname{diam}(G) = \max\{ecc(x) ; x \in V(G)\}$

POLMER GRAFA: $\operatorname{rad}(G) = \min\{ecc(x) ; x \in V(G)\}$

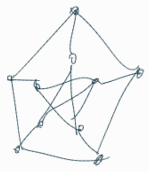
PRIMERI: $\operatorname{diam}(K_n) = 1 = \operatorname{rad}(K_n)$ K_n je poln graf K_4

$\operatorname{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \operatorname{rad}(C_n)$ C_n je cikličen graf  C_6

$\operatorname{diam}(P_n) = n-1$ pot:  P_6

$\operatorname{rad}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Petersonov graf P:



$\operatorname{diam} P = 2 = \operatorname{rad} P$

je „netrivialen"

$\operatorname{diam} G = 1 \Leftrightarrow G$ je poln graf in ima vsaj 2 vozlišči

OŽINA grafa $g(G)$ je dolžina najkrajšega lihega cikla v G, če obstaja, sicer je $g(G) = \infty$.

$g(P) = 5$

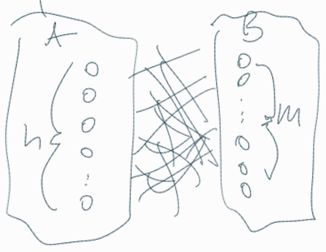
DVODELNI GRAFI

G je dvodelen, če $\exists$ razdelitev $V(G)$ v $A \cup B \ni$:

$\{u,v\} \in E(G) \Rightarrow u \in A, v \in B$ ali $u \in B, v \in A$

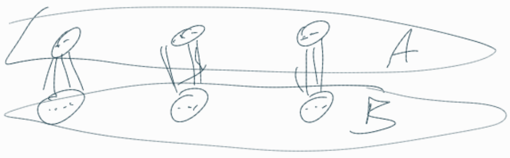
razdelitev je delitev množice na A, B, da $A \cap B = \emptyset$

$K_{n,m}$ je polni dvodelni graf

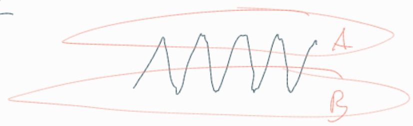


PAR (A,B) pravimo „dvodelna razdelitev dvodelnega grafa"

graf je dvodelen $\Leftrightarrow$ vsaka komponenta grafa je dvodelna.



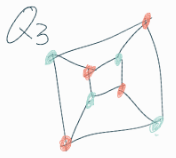
Pri obravnavi dvodelnosti lahko brez škode privzamemo povezanost grafa.

PRIMERI: P_n je dvodelni graf 

C_6: 

C_{2k} je dvodelni graf za $k \in \mathbb{N}$ (sodi cikli so dvodelni, lihi niso) (*)

d-kocke:

Q_d $d \geq 1$: 

je dvodelni graf

• $\in A$

• $\in B$

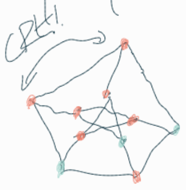
Ideja za požrešni (greedy) postopek, ki ugotovi, a je povezan graf dvodelen ali ne.

vozlišča Q_d so binarni nizi dolžine d.
dva niza sta sosednja, če se razlikujeta v natanko enem mestu.

A so vozlišča, kjer je population count niza sod
B so vozlišča, kjer je population count niza lih.

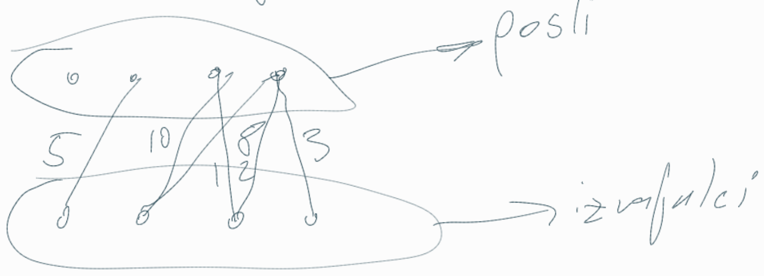
Vsaka povezava spremeni en bit, zato bo vsaka povezava povezovala vozlišče iz A in vozlišče iz B.

Petersenov graf je pozitiven postopki:



ni petersenov.

Aplikacija dvodelnih grafov:



E(G) povezanost opravljanja posla.
Pogosto je naloga z omrežjem

IZREK: Graf G je dvodelen $\iff$ ne vsebuje lihih ciklov

Dokaz: BSS: naj bo G povezan
$(\implies)$: očitno: če G vsebuje lih cikel, zagotovo ni dvodelen, saj ne moremo razdeliti niti množice cikličnih vozlišč. glej (*)

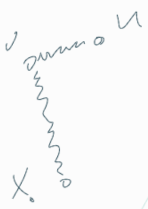
$(\impliedby)$: let G poljuben brez lihih ciklov.
izberimo $x_0 \in V(G)$ poljubno fiksno vozlišče.
$A = \{u \in V(G);\ d_G(u, x_0) \text{ sodo}\}$
$B = \{u \in V(G);\ d_G(u, x_0) \text{ liho}\}$

$\implies x_0 \in A \impliedby d_G(x_0, x_0) = 0$

$\implies A \cup B = V(G),\quad A \cap G = \emptyset$

trdimo, da je (A,B) dvodelna razdelitev za G.
- razdelitev je. ✓
- a je dvodelna? dokazati je treba, da
  $\forall u, v \in A: \{u, v\} \notin E(G)$
  $(\forall u, v \in B: \{u, v\} \in E(G))$

$u, v \in A$: switch
case $d_G(x_0, u) \neq d_G(x_0, v)$:
vsled sodosti povezav velja $|d_G(x_0, u) - d_G(x_0, v)| \geq 2$
BSS: $d_G(x_0, u) > d_G(x_0, v)$
če bi $\{u, v\} \in E(G)$
$d_G(x_0, u) \leq d_G(x_0, v) + 1$
↳ trik. neen.



$\implies d_G(x_0, u) = d_G(x_0, v) + 1$

PROTISLOVJE

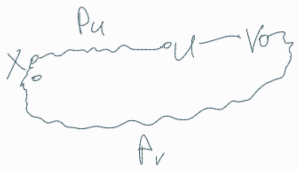
case $d_G(x_0,u) = d_G(x_0,v) = t$:

let P_u najkrajša $x-u$ pot v G

P_v najkrajša $x-v$ pot v G

RAAPDD $\{u,v\} \in E(G)$:

poglejmo sklenjen sprehod



dolžina sprehoda

$$\underbrace{\text{je } |P_u| + 1 + |P_v| = 2|P_u| + 1}_{\text{sklenjen lih sprehod}} \Rightarrow \text{graf vsebuje lih cikel}$$

trditev zgoraj

~~X~~ → točk

ppp na dužij točk

$\{u,v\} \notin E(G)$

</switch>

$\square$