# KONGRUENCA:

N — Dvomestnemu številu smo prišteli vsoto njegovih števk in dobili 62. Katero je to dvomestno število? Najdi vse rešitve!

$$b\cdot 10^0 + a\cdot 10^1 + a + b = 62$$
$$b\cdot 2 + a(10+1) = 62$$
$$2b + 11a = 62$$

| r | s | t | k |
|---|---|---|---|
| 11 | 1 | 0 | |
| 2 | 0 | 1 | 5 |
| 1 | | | |

...

$a = 4 \quad b = 9$

N — Najdi ostanek $58^3$ pri deljenju s 7!

$58^3 \equiv x \pmod 7$

$58^3 \equiv \boxed{2^3} \pmod 7$, $8 \equiv 1 \pmod 7$

ker

$58 \equiv 2 \pmod 7$

$58^3 \equiv 1 \pmod 7$

Pravilo:

$a \equiv b \pmod c \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod c$

Ki, ko bi v matematiki za to imeli namenski simbol, kot imamo $\forall, \exists, \Sigma, \Pi, ..$

N — $\boxed{\text{Brez kalkulatorja}}$ izračunaj:

a.) ostanek $1001\cdot 1002\cdot 1003$ pri deljenju z 9

b.) -||- $49^{12345}$ -||- 6

c.) -||- $3^6$ -||- 5

d.) zadnjo števko $7^{101}$

e.) Dokaži, da $7 \mid 58^n + 46\cdot 16^n + 107^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) $1001\cdot 1002\cdot 1003 \equiv x \pmod 9$

$x = (1001 \% 9)(1002 \% 9)(1003 \% 9) =$

$= 2\cdot 3\cdot 4 = 24 \equiv 6 \pmod 9$

$1001\cdot 1002\cdot 1003 \equiv 6 \pmod 9$.

$(9k+r)(9l+s)(9j+t) =$

$= 9\cdot Q + rst$

b.) $49^{12345} \equiv x \pmod 6$

$49 \equiv 1 \pmod 6$

$x = 1^{12345} = 1$

$49^{12345} \equiv 1 \pmod 6$

c.) $3^6 \equiv x \pmod 5$

$(3^2)^3 \equiv x \pmod 5$

$9^3 \equiv x \pmod 5$

$9 \equiv -1 \pmod 5$

$\Rightarrow 9^3 \equiv (-1)^3 \pmod 5$

$9^3 \equiv -1 \pmod 5$

$-1 \equiv 4 \pmod 5$

d.) zadnja števka ($7^{101} \equiv x \pmod{10}$)

$7 \equiv -3 \pmod{10}$

$7^{101} \equiv (-3)^{101} \pmod{10}$

$7^{101} \equiv 7\cdot 7^{100} \pmod{10}$

$7^{101} \equiv 49^{100} \pmod{10}$

$49 \equiv -1 \pmod{10}$

$7^{101} \equiv (-1)^{100} \pmod{10}$

$7^{101} \equiv 1 \pmod{10}$

e.) dokaži, da velja $7 \mid 58^n + 46\cdot 16^n + 107^{n+1}$

$\iff \overset{2^n}{58^n} + \overset{4}{46}\cdot \overset{2^n}{16^n} + \overset{2^{n+1}}{107^{n+1}} \equiv 0 \pmod 7$

$58 \equiv 2 \pmod 7$

$16 \equiv 2 \pmod 7$

$107 \equiv 2 \pmod 7$

$2^n + 4\cdot 2^n + 2^{n+1} \equiv 0 \pmod 7$

$2^n \underbrace{(1+4+2)}_{7} \equiv 0 \pmod 7$ ✓

N

$32^{1024} \equiv x \pmod 7$

$4^{1024} \equiv x \pmod 7$

$4^{1024} \equiv x \pmod 7$

$16^{512} \equiv_7 2^{512} = 4^{256} = 16^{128} \equiv_7 2^{128} = 16^{32} \equiv_7 2^{32} = 16^{8} \equiv_7 2^{8} = 16^{2} \equiv_7 2^{2} = 4$

N

Z vea izračunaj $\gcd(72,27)$ in najdi $x,y \in \mathbb{Z}$, da velja $72x + 27y = 9$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 72 | 1 | 0 | |
| 27 | 0 | 1 | $k=2$ |
| 18 | 1 | -2 | $k=1$ |
| 9 | -1 | 3 | $k=2$ |
| 0 | . | . | |

$-72 + 3\cdot 27 = 9$

je.

neštevilne rešitve za diofantsko enačbo oblike

$ax + by = c$

takole:

$a(x_0 + bz) + b(y_0 - az) = c$

$z \in \mathbb{Z}$.

KAJ PA, ČE IMAMO DIOFANTSKE Z VEČ KOT DVEMA SPREMENLJIVKAMA?

$4x + 6y + 7z = 1 \; -6y$

$\gcd(4,7) = 1$

samo zato, ker $\gcd(4,7)=1$

$4x + 7z = 1 \quad /\cdot(1-6y)$

$x = 2 + 7k$

$z = -1 - 4k$

$y \in \mathbb{Z};\; k \in \mathbb{Z}$

$x = (1-6y)(2+7k)$

$z = (1-6y)(-1-4k)$

N

Let $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj

a.) možne ostanke $n^2$ pri deljenju s 5. 0, 1, 4

b.) možne ostanke $n$ pri deljenju s 6, če je $n$ praštevilo.

a.)

| $n \% 5$ | $n^2 \% 5$ |
|---|---|
| 0 | $0^2$ |
| 1 | $1^2$ |
| 2 | $2^2 = 4$ |
| 3 | $3^2 = 9 \equiv_5 4$ |
| 4 | $4^2 = 16 \equiv_5 1$ |

b.) $n = 6k + r$

$\{1, 5\} \equiv_6 \{1, -1\}$

N

Dokaži, da naslednja števila niso popolni kvadrati:

a.) 3141592653 5 — a) $5|a \Rightarrow 25|a$, ker bi bil popoln kvadrat. ✗. NI (ni res)

b.) 9123456782 1 $\boxed{2}$ — zadnja števka popolnega kvadrata ne more biti 2 – – glej pravilo za deljivost s 4 ali pa to tabelico.

c.) 3141516137 5 $\%4=3$

NI POPOLN KVADRAT

| $c \% 4$ | $c^2 \% 4$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |

$3 \cancel{\ast}$

| $b \% 10$ | $b^2 \% 10$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 6 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 9 |
| 8 | 4 |
| 9 | 1 |

$2 \cancel{\ast}$ NI POPOLN KVADRAT.

N

Skupina študentov se je šla smučat. Vsak dan v žičnici so opazili 3 zanimiva dejstva:

- ko so šli na vrh proge s štirisedežnico, so se z zadnjo gondolo peljali trije
- ko so šli na vrh proge s petsedežnico, so se z zadnjo peljali 3
- s trisedežnico pa eden.

Koliko jih je, če veš, da jih je manj kot sto.

iščemo $n<100 \ni: n \% 4 = 3 \wedge n \% 5 = 3 \wedge n \% 3 = 1$

$\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$

enačbe: $n = 4k_1 + 3$

$n = 5k_2 + 3$

$n = 3k_3 + 1$

$n = 20l + 3$

$4k_1 \cancel{+3} = 5k_2 \cancel{+3}$

$4k_1 = 5k_2$

$k_1 = \frac{5}{4} k_2$

vemo $\boxed{4 | k_2}$

oz.: $k_2 = 4l + 0$

$l \in \mathbb{Z}$

$3k_3 + 1 = 20l + 3$

$3k_3 = 20l + 2$

$20l - 3k_3 = -2$

diofantska

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 1 | 0 | |
| 3 | 1 | 0 | $k=6$ |
| 2 | 1 | $-6$ | $k=1$ |
| 1 | $-1$ | 7 | $k=2$ |
| 0 | x | x | |

$20(-1) + 3 \cdot 7 = 1$

oz

$20(-1) - 3(-7) = 1 \quad / \cdot (-2)$

$x = -1 + 3t$

$y = -7 + 3t$

$20 \cdot 2 - 3 \cdot 14 = -2$

$l = 2 + 3t \quad k_3 = 14 + 20t$

$n = 3k_3 + 1 = 3(14 + 20t) + 1 = 42 + 60t + 1$

$\hookrightarrow t = 0$, da $n < 100$

$\Downarrow$

$n = 43$

$n \% 5 = 3$ ✓

$n \% 3 = 1$ ✓

$n \% 4 = 3$ ✓

N

Andrej je zapisal $2034 \equiv 2024$, a je pozabil, kateri modul je mislil. Kateri so možni moduli?

$$m \mid (2034 - 2024) \qquad m \in \{1, 2, 5, 10\}$$
$$m \mid 10$$

N

Kateri števki v $30!$ sledijo samo ničle?

↳ vrednost