$A \times B = B \times A \iff A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$

$\Leftarrow$ ✓ PREPROSTO

$\Rightarrow$: let $A \times B = B \times A$

Dokaži $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$

predpostavimo $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

Dokažimo: $\underline{A = B}$

let a poljuben in $b_0 \in B$ nek element

$\Rightarrow (a, b_0) \in A \times B \iff (a, b_0) \in B \times A \iff a \in B \wedge b_0 \in A \Rightarrow a \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B$

in obratno... $\Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B$

MOČ MNOŽIC.

če $\exists$ injekcija $A \to B$: $|A| \leq |B|$.

če $\exists$ surjekcija $A \to B$: $|A| \geq |B|$.

če $\exists$ bijekcija $A \to B$: $A \sim B$

N

Dokaži, da je $|[0,1)| \sim |[0,1]|$.

injekcija $i: [0,1) \to [0,1]$: $i(x) = x$

injekcija $s: [0,1] \to [0,1)$: $s(x) = x/2$

Bijekcija $b: [0,1] \to [0,1)$:

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} ; & \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ t. } x = \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ x ; & \text{sicer} \end{cases}$$

N

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{6, 7, 8\}$

def na A

a) koliko je preslikav $A \to B$ 3^5 $\left(|B^A| = |B|^{|A|}\right)$

b) koliko je surjekcij $A \to B$

Od vseh preslikav bomo odšteli tiste, ki niso surjekcije:

$M_1 = \{f: A \to B \mid \forall x : f(x) \neq 6\}$

$M_2 = \{f: A \to B \mid \forall x : f(x) \neq 7\}$

$M_3 = \{f: A \to B \mid \forall x : f(x) \neq 8\}$

{ glej načelo o vključitvi in

$$|M_1| = |M_2| = |M_3| = 2^5$$

$$|M_1 \cap M_2| = |M_2 \cap M_3| = |M_1 \cap M_3| = 1$$

$$|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 0$$

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 2^5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 93$$

surjekcij $A \to B$ je $3^5 - 93 = 243 - 93 = 150$.

[domača naloga: preštej še injekcije].

N

Koliko naravnih števil, manjših od 10^6 ni niti popoln kvadrat niti popoln kub?

$$\boxed{a \text{ je popoln kvadrat}} \iff \exists q \in \mathbb{N};\ q^2 = a$$

$$M_1 = \{ x < 10^6 ;\ \exists a \in \mathbb{N} \ni: a^2 = x \} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, (10^3-1)^2\} \quad \text{velikost: } 10^3 - 1$$

$$M_2 = \{ x < 10^6 ;\ \exists a \in \mathbb{N} \ni: a^3 = x \} = \{1^3, 2^3, 3^3, \dots, (10^2-1)^3\} \quad \text{velikost: } 10^2 - 1$$

očitno je, da

$$M_1 \cap M_2 = \{ x < 10^6 ;\ \exists a \in \mathbb{N} \ni: a^6 = x \} = \{1^6, 2^6, \dots, (10-1=9)^6\}$$

velikost: $10^1 - 1$

$$M_1 \cup M_2 = M_1 + M_2 - M_1 \cap M_2 = 999 + 99 - 9 = 1098 - 9 = 1089$$

rešitev: $10^6 - 1089 - 1 = 10^6 - 1090$

N

$$\exists \text{ bijekcija: } A \to \mathbb{N} \Rightarrow |A| = |\mathbb{N}|$$

(A je števna)

naloga: naj bodo A_i $_{i \in \mathbb{N}}$ disjunktne števne množice. Dokaži, da je tudi unija $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ števna.

$$b_i(a) : A_i \to \mathbb{N}$$

↳ index elem. v množici

$$I : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbb{N}.$$

$$I(a) = f(i_0)^{b_{i_0}(a)}$$

$f(a)$ slika v a-to praštevilo

N

$$|\mathbb{Q}| \leq |A| \leq |\mathbb{R}|$$

Vemo: ...

↳ algebraična števila

Število $a \in \mathbb{R}$ je algebraično, če $\exists p \in \underbrace{\mathbb{Z}[x]}$ $\ni: p(a) = 0$

polinomi s $\mathbb{Z}$ koeficienti

KJE TUKAJ JE ENAČAJ?

$\sqrt{2} \in A$: $p(x) = x^2 - 2$

$\frac{a}{b} \in A$: $p(x) = bx - a$.

...

$\pi \notin A$, $e \notin A$

dokažimo najprej $\mathbb{Z}[x] \sim \mathbb{Q}$

$A_i = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ldots \times \mathbb{Z}|$

dobro linearno uredimo polinome.

$f(a) = \min \{ p \in \mathbb{Z}[x], p(a) = 0 \}$ [domača naloga]

BOLJŠA REŠITEV:

vsak polinom ima končno ničel. N_p: ničle polinoma.

$A = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]} N_p$ A je števna, ker je unija števnih.

$|A| = |\mathbb{Q}|$ ✓

N

let A množica preslikav $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

let $B \subseteq A$ zvezne preslikave $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a.) ali je $|A| = |\mathbb{R}|$ namig: Ali je $\varphi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ injekcija

b.) ali je $|B| = |\mathbb{R}|$

stvčenje D_f na $\mathbb{Q}$

a.) $|A| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \geq |2^{\mathbb{R}}| = |P(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$

b.) $|B| \geq |\mathbb{R}|$? Da. naj bo $g: \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto f$, $f(t) = x$

konstantna

g je injekcija.

ANAL: ...

ANA

za zvezni f,g velja:

$$f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}} \Rightarrow f = g$$

$|B| = |\mathbb{R}|$?

najti moramo injekcijo

$B \to \mathbb{R}$.

zvezne fje.

vsako fjo lahko zapišemo z zaporedjem

$b: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

[D.N.]

n	1	2	3	4
$b(n)$	q_1	q_2	q_3	q_4
f	$f(q_1)$	$f(q_2)$	$f(q_3)$	$f(q_4)$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$\} \; \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

dokazati je treba $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$