DSIUPMF 2023-12-01

N

$\Rightarrow P, Q$ sta ekvivalenčni.

$\rightarrow P * Q = Q * P$

$\Longrightarrow P * Q$ je

a.) simetrična (smo že)

b.) tranzitivna

$$\forall a,b,c.\ a(P*Q)b \wedge b(P*C)c \Rightarrow a(P*Q)c$$

DOKAZ:

•) $a(P*Q)b \Leftrightarrow \exists x:\ aPx \wedge xQb$

...

N

Na $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definirano $\sim$ s predpisom:

$\boxed{m \sim n \Leftrightarrow mn \text{ je popoln kvadrat}}$

ekvivalenčno relacijo

a.) Dokaži, da je ekvivalenčna. Kaj je $\sim[30]$, kaj pa $\sim[12]$? Poišči $A \subseteq \mathbb{N}$, da velja $\forall n: m(\sim[n] \cap A) = 1$

$\boxed{}$: dokazujemo: refleksivnost, tranzitivnost, simetričnost

$n \sim n$: nn je popoln kvadrat (n^2) ✓

$m \sim n \Rightarrow n \sim m$: množenje komutira.

$mn = (a \in \mathbb{N})^2 \Rightarrow nm = (a \in \mathbb{N})^2$. ✓

$\boxed{a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c}$ naj bo $a \sim b$ in $b \sim c$, torej

$ab = (x \in \mathbb{N})^2 \qquad bc = (y \in \mathbb{N})^2$

$$ac = \frac{x^2}{b} \cdot \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 y^2}{b^2} = \frac{(xy)^2}{b^2} = \left(\frac{xy}{b}\right)^2 \in \mathbb{N}, \text{ ker } ac \in \mathbb{N}. \ ✓$$

$\boxed{\square}$

$\sim[30] = \{x \in \mathbb{N};\ \exists a \in \mathbb{N}: x30 = a^2\} =$

30	2
15	3
5	5
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$= \{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2;\ x \in \mathbb{N}\}$

$\sim[12] = \{3 \cdot x^2;\ x \in \mathbb{N}\}$

$\sim[n] = \{$(zmnožek vseh praštevil v razcepu n, ki so na lihi potenci)

$\cdot x^2;\ x \in \mathbb{N}\}$.

$A = \{p_1 p_2 \cdots p_n \mid p_i$ so praštevila, $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_i$, $n \in \mathbb{N}_0\}$

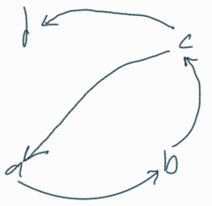
prazen produkt $= 1$.

N ——

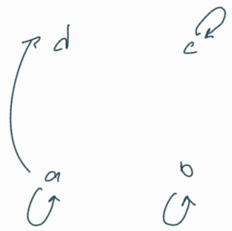
Let $A = \{a,b,c,d\}$ in

$R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(c,a)\}$

nariši graf relacije in z njega izračunaj R^3 in R^{2023}.



$R^3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,d)\}$



$R^{2023} = \{(a,b),(b,c),(c,a),(c,d)\}$

N —— Za delne urejenosti nariši Hassejev diagram.

a.) $(\{1,2,\dots,12\}, |)$ b.) $(\{1,2,\dots,7\}, \leq)$ c.) $(A,\leq)$, A := množica končnih dvojiških zaporedij, ki se začno z 1, in je $a \leq b$, ko se b začne z a.

$\{(1,0,1),(1,1,1,0,0,1),(1,0,1,1,0),\dots\}$

Določi minimalne, maksimalne, prve in zadnje elemente, če $\exists$.

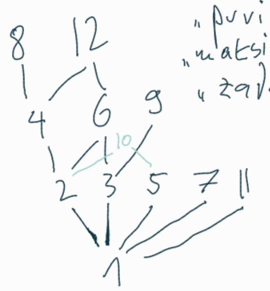
a.)

„minimalen element" := a je min $\Leftrightarrow \forall x: x \leq a \Rightarrow x = a$

„prvi" := a je prvi $\Leftrightarrow \forall x: a \leq x$

„maksimalen" := a je max $\Leftrightarrow \forall x: a \leq x \Rightarrow a = x$

„zadnji" := a je zadnji $\Leftrightarrow \forall x: x \leq a$



minimalni: $\{1\}$

prvi: $\{1\}$

maksimalni: $\{8,12,9,10,7,11\}$

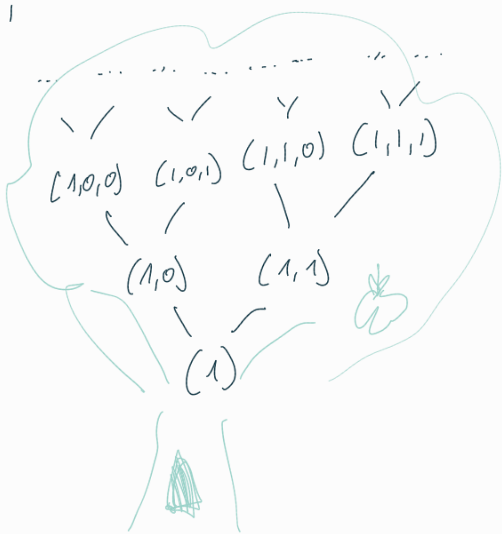
zadnji: $\{\}$

b.)

prvi = maksimalen = $\{1\}$

zadnji = minimalen = $\{7\}$

c.)



prvi = najmanjši = $\{(1)\}$
zadnji = $\{\}$
največji = $\{\}$

N ——— opiši neposredne naslednike v delnih ureditvah:

a.) $(\mathbb{N}, \leq)$ $\boxed{n+1}$

b.) $(\mathbb{R}, \leq)$ $\boxed{\nexists}$

c.) prejšnja naloga - primer C $\boxed{\{(n,0),(n,1)\}}$

d.) $(P(\mathbb{R}), \subseteq)$ $\boxed{A \cup \{x\}, x \in \mathbb{R}}$

N ——— najdi, če $\exists$

prejšnja naloga: c.)

a.) $\inf\{X,Y\}$ in $\sup\{X,Y\}$ za $X,Y \subseteq A$ in $(P(A), \subseteq)$

b.) $\inf\{12,8\}$ in $\sup\{12,8\}$ za $(\mathbb{N}_0, |)$

c.) $\inf A$ in $\sup A$ za končno $A \subseteq \mathbb{N}$ in $(\mathbb{N}_0, |)$

d.) $\inf A$ za končno $A \subseteq \mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Z}, |)$

→ $\inf\{X,Y\} = X \cap Y$ $\sup\{X,Y\} = X \cup Y$

→ $\inf\{12,8\} = 4 = \gcd\{12,8\}$ $\sup\{12,8\} = 24 = \operatorname{lcm}\{12,8\}$

→ $\inf\{A\} = \gcd\{A\}$ $\sup\{A\} = \operatorname{lcm}\{A\}$

→ $\inf\{A\} =$!!! ni delna ureditev.

N ———

na $\mathbb{R}^2$ definiramo

$$(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2) \iff y_1 \leq y_2 \wedge x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2$$

a.) dokaži, da je R delna ureditev

b.) let $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ poljubna. Skiciraj množico:

· zgornjih mej: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x_0,y_0)\, R\, (x,y)\}$

· spodnjih mej: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\, R\, (x_0,y_0)\}$

Ali je R linearna urejenost?

c.) najdi $\inf\{(1,0),(0,1)\}$ in $\sup\{(1,0),(0,1)\}$

d.) najdi $\sup A$ in maksimalne elemente A za

$A=[0,1]\times[0,1]$

DELO-REŠEVANJE:

a.) ref, tranz, antisim.

REF: $(x_1,y_1)\, R\, (x_1,y_1)$

$y_1 \le y_2 \wedge x_1-y_1 \le x_1-y_1$ ✓

ANTISIM

$(x_1,y_1)\, R\, (x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2)\, R\, (x_1,y_1) \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

velja $y_1 \le y_2$ in $y_2 \le y_1 \Rightarrow$

velja tudi $x_1-y_1 \le x_2-y_2$ in $x_2-y_2 \le x_1-y_2 \Rightarrow$

$y_1=y_2$

$x_1-y_1=x_2-y_2$

$x_1-y_2=x_2-y_2 \quad /+y_2$

$x_1=x_2$ ✓

TRANZ:

$(x_1,y_1)\, R\, (x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2)\, R\, (x_3,y_3) \Rightarrow (x_1,y_1)\, R\, (x_3,y_3)$

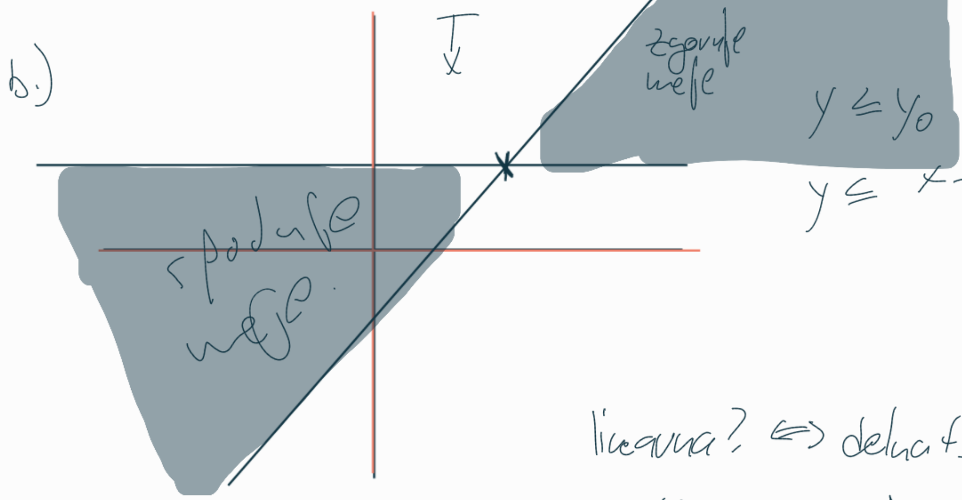
velja: $y_1 \le y_2$ in $y_2 \le y_3 \Rightarrow y_1 \le y_3$

velja tudi: $x_1-y_1 \le x_2-y_2$ in $x_2-y_2 \le x_3-y_3$

$\Rightarrow x_1-y_1 \le x_3-y_3$, torej velja oboje. ✓

a.) □

b.)



$y \le y_0$

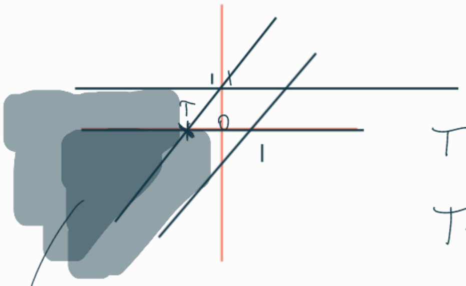
$y \le x-x_0+y_0$

linearna? $\Leftrightarrow$ delna + strogo sovisna.

ni linearna, niso vsi primerljivi

$T R (x_0, y_0)$ niti $(x_0, y_0) R T$ ne velja.

c.) $\inf\{(1,0), (0,1)\}$.

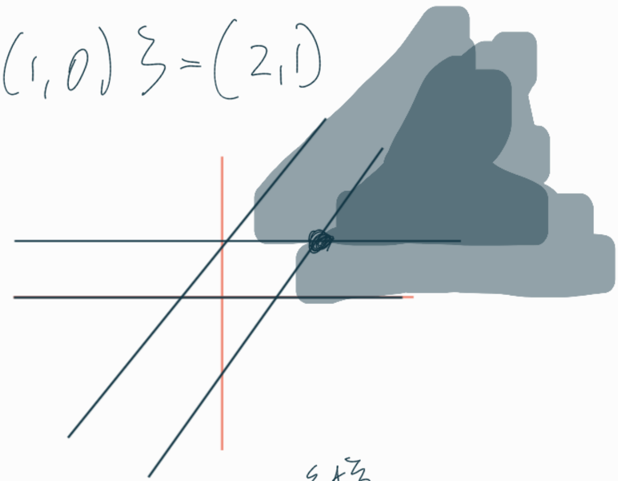


T je $\inf\{(0,1), (1,0)\}$.

$T = (-1, 0)$

skupno področje mej. največja je T.

$\sup\{(0,1), (1,0)\} = (2,1)$



$\sup A = (2,1)$