NESKONČNE MNOŽICE

A in B sta <u>enakomočni</u> $\Leftrightarrow \exists f: A \to B$ bijekcija. Pišemo: $A \sim B$.

Zgled: $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{Z}$

$$f(z) = \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z-1 & z < 0 \end{cases} \qquad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$$

očitno, da je bijekcija.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
7	5	3	1	0	2	4	6	8

TRDITEV: $\sim$ je ekvivalenčna relacija

Dokaz:

REFL.: $A \sim A$. $f: A \to A = \mathrm{Id}_A$ bijekcija

SIMETR.: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

če $\underset{A \to B}{f}$ bijekcija, tedaj $\exists \underset{B \to A}{f^{-1}}$ bijekcija.

TRANZ.:

$A \sim B$ in $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

bijekciji $\begin{matrix} f: A \to B \\ g: B \to C \end{matrix}$, tedaj $g \circ f: A \to C$ bijekcija

$\square$ $\sim$ je ekvivalenčna relacija.

EKVIVALENČNI RAZREDI so „kardinalna števila"

ki jih naštejemo:

$\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\emptyset \quad \forall M_1 \quad \forall M_2$

{3} $\quad m(M)=1 \quad m(M)=2$

Razred najmanjše neskončnosti: $\aleph_0$ „alef 0"

$\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots\}$ „števna neskončnost"

[Dedekindova definicija neskončne množice]

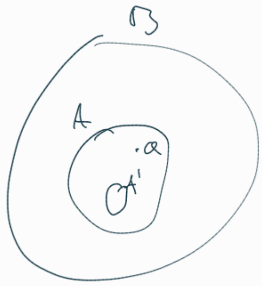
Množica A je neskončna, če $\exists B \subset A \ni: A \sim B$.

prava

TRDITEV: A neskončna, $A \subseteq B \Rightarrow B$ neskončna.

DOKAZ:

$\exists A' \subset A \ni: \boxed{f}: A \to A'$ bijekcija



$D = B \setminus A \cup A'$

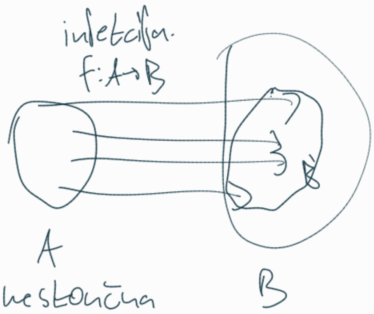
$g: B \to D$ bijekcija

$$g(x) = \begin{cases} x ; & x \in B \setminus A \\ \boxed{f}(x) ; & x \in A \end{cases}$$

Posledica: podmnožica končne množice je končna.
če bi ne bila, bi bila neskončna, tedaj bi tudi nadmnožica morala biti neskončna $\times$

Def: množica A je končna, če ni neskončna.

TRDITEV



zožitev
$f': A \to B'$
je bijekcija,
zato mora
tudi B biti
neskončna.

ZDB: $f: A \to B$ injekcija, A neskončna $\Rightarrow B$ neskončna.

... ker $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

zgled: Ali je $\mathbb{R}$ neskončna, ja, ker ima $\mathbb{N}$ ... vložitev.

$\mathbb{Q}$ ... $\{a, \dots$ $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \cup \{a,b\}$ ... $\{a, \dots$ $\mathbb{N} \cup \{a,b\}$

[ŠTEVNA NESKONČNOST]

A je števno neskončna $\Leftrightarrow A \sim \mathbb{N}$

[D.N] $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \in \aleph_0$

[D.N] $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

ZGLED:

NOTE TO SELF: zelo filozofsko
Ali obstaja „množica", kjer elementi po nobeni lastnosti nikakor niso linearno urejljivi? Torej da ne obstaja relacija, ki bi izdelala linearno urejenost?

{MOČ KONTINUUMA}

IZREK (CANTOR): $(0,1)$ ni števno neskončna

D: $f: n \mapsto \frac{1}{n+1}$ injekcija $\mathbb{N} \to (0,1)$

$\Rightarrow (0,1)$ je neskončna.

R.A.

Recimo $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ bijekcija:

$$f(0) = 0{,}a_0^0 a_1^0 a_2^0 a_3^0 \dots$$
$$f(1) = 0{,}a_0^1 a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots$$
$$\vdots$$
$$f(k) = 0{,}a_0^k a_1^k a_2^k a_3^k \dots a_k^k \dots$$

argument: $\underbrace{0{,}((a_0^0+1)\,\%\,10)((a_1^1+1)\,\%\,10)((a_2^2+1)\,\%\,10)\dots}$

Tega števila ni v zaporedju ampak je pa v $(0,1)$

$\times$

$\rightarrow$ $(0,1)$ ni števna.

ekvivalenčni razred: c — „kontinuum"

velja: $\forall a,b,\ a<b: (a,b) \in c$

velja [illegible]

[Domača naloga: dokaži $\mathbb{R}^+ \sim (0,1)$]

bijekcija: $f(x) = \frac{x}{1-x}$ $(0,1) \to \mathbb{R}^+$

dokaži: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^+$.

Relacija $\leq$

A ima manjšo ali enako moč kot B, če $\exists$ injektivna funkcija iz A v B

označimo $A \leq B$.

strogo manjša moč:

$A < B$, če $A \leq B$ in $A \not\sim B$.

IZREK, ki ga ne bomo dokazali:

Schröder–Bernsteinov:

če $A \leq B$ in $B \leq A \Rightarrow A \sim B$

IZREK, ki ga ne bomo dokazali: aksiom izbire

Izrek o trihotonomiji:

A, B poljubni $\Rightarrow$ velja natanko ena izmed:

- $A < B$
- $B < A$
- $A \sim B$

TRDITEV:

Relacija $\leq$ je sovisna.

izrek o surjekciji, ki ga ne bomo dokazali:

- A, B poljubni
- $A \neq \emptyset$
- $A \leq B \Longleftrightarrow \exists g$ surjekcija $B \to A$

Kako pokažemo, $A \sim B$?:

- $\exists$ bijekcija $A \to B$

- $\exists$ injekciji $f_A : A \to B$ in $f_B : B \to A$
- $\exists$ surjekciji: $g_A : A \to B$ in $g_B : B \to A$
- $\exists$ injekcija $f : A \to B$ in surjekcija $g : A \to B$
- $\exists C : A \sim C$ in $B \sim C \implies A \sim B$

IZREK, ki ga ne bomo dokazali:

Vsaka neskončna množica vsebuje števno neskončno podmnožico.

[MOČ POTENČNE MNOŽICE]

IZREK:

A poljubna.

$A < P(A)$

Dokaz:

- $A \leq P(A)$

$\forall a \in A : f(a) = \{a\} \in P(A)$

$f : A \to P(A)$ injekcija.

- trdimo, da $A \not\sim P(A)$

R.A.

predpostavimo, da je $A \sim P(A)$

$\Rightarrow \exists f : A \to P(A)$ bijekcija.

$\forall a \in A : f(a) \in P(A)$.

in bodisi $a \in f(a)$

bodisi $a \notin f(a)$

tvorimo:

$B := \{a \in A : a \notin f(a)\}$

jasno je, da $B \subseteq A$

oz.

$B \in P(A)$

ker je f bijekcija $\Rightarrow$

$\exists : f(b) = B$

Ali $b \in f(b)$?

1. $b \notin B \Rightarrow b \in f(b) = B$ $\times$

2. $b \in B \Rightarrow b \notin f(b) = B$ $\times$

$\times$ torej ni bijekcija.

~~~~~ ODMOR ~~~~~

POSLEDICA:

A poljubna množica velja $A < P(A) < P^2(A) < \dots$

$$\mathbb{N} < \underbrace{P(\mathbb{N})}_{= c} < P^2(\mathbb{N}) < \dots$$

Hipoteza kontinuuma: (conjecture) Ali je med $\aleph_0$ in c še katero kardinalno število?

IZREK:

A neskončna, B končna

$$A \setminus B \sim A$$

IZREK:

A neskončna, B števno neskončna $\Longrightarrow A \sim A \cup B$

velja:

- $(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1) \sim [0,1]$
- $P(\mathbb{N}) \sim [0,1] \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}^3 \dots$

TEORIJA ŠTEVIL

spodnji celi del: $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor = \max \{x \in \mathbb{Z} ; t \leq x\}$
~~~~~

zgornji celi del: $x \in \mathbb{R}$: $\lceil x \rceil = \min \{ x \in \mathbb{Z} ; t \geq x \}$

$\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ $\quad \lceil 3{,}5 \rceil = 4$

$\lfloor -3{,}5 \rfloor = -4$ $\quad \lceil -3{,}5 \rceil = -3$

$x \in \mathbb{Z} \;\sim\; x = \lfloor x \rfloor \;\sim\; x = \lceil x \rceil$

$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ $\quad \ldots$

- $t \in \mathbb{Z}$: $\lfloor x + t \rfloor = \lfloor x \rfloor + t$

  $\lceil x + t \rceil = \lceil x \rceil + t$

- $-\lfloor -x \rfloor = \lceil x \rceil$

  $-\lceil -x \rceil = \lfloor x \rfloor$

- $\lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil$
- $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$

N

$m, n \in \mathbb{N}$

koliko je naravnih števil v $[1, n]$, deljivih z m. $\quad \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$

N

$n \in \mathbb{N}$, p praštevilo

poišči eksponent p v razcepu $n!$

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^t} \right\rfloor \qquad t = \lfloor \log_p n \rfloor$$