PERMUTACIJE:

A je končna. Def: Permutacija je bijekcija $A \to A$.

$S(A)$ so vsi pari.

PRIMER: $A=\{1,2,\dots n\}$, $S_n := S(A)$

$|S_n| = n!$

n je dolžina permutacije.

Če $\pi \in S_n$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

[produkt]

$\pi_1, \pi_2 \in S_n$.

Oznaka: $\pi_1 \pi_2$ je $\pi_1 * \pi_2$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 * \pi_1$$

ZGLED:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 2,1,4,3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 3, & 1, & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 1, & 4, & 2, & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 2, & 4, & 1 \end{pmatrix}$$

IDENTITETA IN FIKSNE TOČKE

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

fiksne točke so take, ki se slikajo vase.

$\exists$ INVERZNA PRESLIKAVA

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Če $\alpha = \alpha^{-1}$, temu rečemo „konvolucija".

- Id: vsa števila so fiksne točke.
- π in π^{-1} imata skupne fiksne točke.

Če je $\pi(k)=k$, je k fiksna točka. Rečemo tudi „π pribije k".

[CIKLI]

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ 5, & 7, & 4, & 3, & 1, & 2, & 6, & 10, & 8, & 9 \end{pmatrix}$$

CIKLIČEN ZAPIS PERMUTAC.:

$$\pi = (1,5)(2,7,6)(3,4)(8,10,9)$$

CIKLI SO DISJUNKTNI

Perm. π je cikel $\Leftrightarrow$ $\exists$ nepraznо zaporedje različnih števil $a_0, a_1, \dots a_{r-1} \in \{1, \dots, n\}$, pri katerih velja $\pi(a_i) = a_{(i+1) \bmod r}$ in π pribije vsa števila, ki niso v zaporedju.

$\pi\pi^{-1} = \mathrm{Id}$

$$\pi = (\underbrace{a_0, a_1, a_2, \dots a_{r-1}}) \quad ; \quad \pi^{-1} = (a_{r-1}, \dots, a_2, a_1, a_0)$$

↳ števila od 1 do n, ki tu manjkajo, so fiksne točke

$\pi = (3,6,2,4)$ $n=6$ π je cikel.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 1, & 4, & 6, & 3, & 5, & 2 \end{pmatrix}$$

ZGLED 2: ZMNOŽI $(1,2,3) * (3,1,6)$ v $n=6$

$$= (1,2)(3,6)\underbrace{(4)(5)}$$

↳ cikle dolžine 1 (fiksne točke) lahko izpustimo.

ZGLED: $c_1 = (1\ 3\ 5)$ $c_2 = (2\ 4\ 6)$ → disjunktna:
↳ komutativno množenje

$$c_1 c_2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) = c_2 c_1$$

$$c_2^{-1} c_1^{-1} = (c_1 c_2)^{-1} = (5\ 3\ 1)(6\ 4\ 2)$$

TRDITEV: VSAKA PERMUTACIJA SE DA RAZCEPITI na produkt disjunktnih ciklov

DOKAZ: Očitno je.

enolično (do vrstnega reda ciklov, saj so kot disjunktni komutativni)

[domača naloga]

$c_1 = (1,5,2,8)$

$c_2 = (1,8,6,5)$

$n=8$

- $c_1 * c_1$
- $c_2 * c_1$
- $c_1^{-1} * c_2^{-1}$
- $c_2^{-1} * c_1^{-1}$

[ORBITE]

$\{1,5\},\{2,7,6\},\{3,4\},\{8,10,9\}$ so orbite permutacije π.

↳ tu bi cikle z enim elementom obvezno pisali.

→ „razbitje" množice $\{1,2,\dots,n\}$

velja:

$\pi = c_1 * \dots * c_t$ ← disjunktni

$\pi^{-1} = c_1^{-1} * c_2^{-1} * \dots * c_t^{-1}$

ZGLED:

$\pi \quad (1\,5)(2\,7\,6)(3\,4)(8\,10\,9)$

$\pi^{-1} = (5\,1)(6\,7\,2)(4\,3)(9\,10\,8)$

Def: „transpozicija" je cikel dolžine 2 (a,b)

POJASNILO

pri ciklih vedno velja

$(a_1\, a_2 \dots a_n) = (a_{(1+i) \bmod n} \dots a_{(n+i) \bmod n}) \; \forall i \in \mathbb{N}$

[sode in lihe permutacije]

$(a_1\, a_2)(a_1\, a_3)(a_1\, a_4)(a_1\, a_5) = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)$

VELJA: $(a_1 \dots a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_n)$

cikel dolžine n lahko razbijem na produkt $(n-1)$ transpozicij (razen za id) ??

TRDITEV: $\forall$ permutacija se da zapisati kot produkt transpozicij. Zapis ni enoličen. Tudi število ciklov ni enolično. Je pa enolična parnost števila transpozicij. Lahko jih je za neko permutacijo v razcepu bodisi sodo bodisi liho.

Označimo: „soda permutacija": sodo št. trans. v razcepu

„liha permutacija": liho število transpozicij v razcepu

$S_3 = \Big\{ \underset{\text{id}}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}, \underset{(2,3)}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}, \underset{(2,1)}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}}, \underset{(3,1)}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}},$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\ \end{pmatrix} \Big\}$

$(2\,3\,1), \ (3\,1\,2) \}$

$(2,3,1)$ $(1,3,2)$

oznaka: $A_3 :=$ sode v $S_3 = \{ id, \underset{(1\,2)(1\,3)}{(1,2,3)}, \underset{(1\,3)(1\,2)}{(1,3,2)} \}$

id je vselej soda (so 0 transpozicij)

velja:
let π poljubna permutacija
π in π^{-1} imata isto parnost

[RED PERMUTACIJE]

$\pi = (1,2) \Rightarrow \pi\pi = id$

$\pi = (1,2,3) \Rightarrow \pi\pi\pi = id$

VELJA
let c_k cikel dolžine k.

$\underbrace{c_k * c_k * \dots * c_k}_{k\text{-krat}} = id$

Def: Red permutacije je najmanjše pozitivno število, za katerega velja $\pi^k = id$.

Označimo $\pi^k = \underbrace{\pi * \pi * \pi * \dots * \pi}_{k}$

oznaka: $red(\pi)$

red produkta disjunktnih ciklov je $lcm(n_1, n_2, \dots, n_k)$, kjer so n_i velikosti ciklov

TRDITEV:
Velja:
- če je c cikel dolžine k, tedaj $red(c) = k$
- če je π produkt disjunktnih ciklov dolžin $m_1, m_2, \dots m_k$, je $red(\pi) = lcm(\vec{m})$
- $red(\pi) = red(\pi^{-1})$ [domača naloga]

MOČ MNOŽIC

[KONČNE MNOŽICE]

let A končna $\qquad A = \{a, b, c\} \to |A| = 3$

$|A|$ število elementov

če sta A in B končni in $|A| = |B| \Rightarrow$ „A in B sta enakomočni"

oznaka: „$A \sim B$"

ZGLED

$|\{\}| = 0$

$|\{0,1\}| = 2$

TRDITEV:

$|\{\{0,1\}\}| = 1$

$|\{\{\}\}| = 1$

Let A, B končni

$\Rightarrow$ sta enakomočni $\Leftrightarrow \exists$ bijekcija $A \to B$.

<u>LASTNOSTI:</u> Let A, B, C končne. Velja:

- $|A \times B| = |A||B|$
- $|P(A)| = 2^{|A|}$
- $|B^A| = |\{f: A \to B\}| = |B|^{|A|}$

  $\hookrightarrow$ množica vseh preslikav $A \to B$
- $|B \setminus A| = |B| - |B \cap A|$
- $A \subseteq B \Rightarrow |B \setminus A| = |B| - |A|$
- $|A \cup B| \Rightarrow |A| + |B| - |A \cap B|$

N: Koliko je števil v intervalu $[1, 100]$, ki so deljiva s 3, a ne s 5.

$$A_n = \left\lfloor \frac{100}{n} \right\rfloor$$: števil v intervalu 100, deljivih z n.

$$|A_3 \setminus A_5| = |A_3| - |A_5|$$

[PRINCIP VKLJUČITVE IN IZKLJUČITVE]

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>DEF.</u> $$S_k = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| = k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_n \cap A_{n-1}|$$

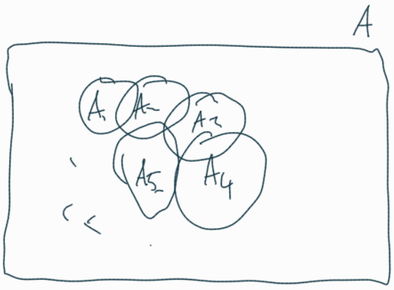
$\vdots$

$$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i$$

[KOMPLEMENTARNA VKLJUCITEV IN IZKLJUCITEV]

$A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ → kot „univerzalna"



$$A_i^c := A \setminus A_i$$

$$|A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c| =$$

$$= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c| =$$

$$= |A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| =$$

$$= |A| - \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+1} S_i \right)$$