SUPREMUM IN INFIMUM

$\sup(a,b)$ in $\inf(a,b)$ v $(M, \subseteq)$

najmanjša zgornja meja $\sup(a,b)$ je element $j \in M$, tako da:

- $a \leq j$ in $b \leq j$
- $\forall x \in M: a \leq x \land b \leq x \Rightarrow j \leq x$

največja spodnja meja: $\inf(a,b)$ je $j \in M$ tako da:

- $j \leq a$ in $j \leq b$
- $\forall x \in M \; x \leq a \land x \leq b \Rightarrow x \leq j$

VELJA:

$a = \inf(a,b) \sim a \leq b \sim b = \sup(a,b)$

RELACIJSKA DEF. MREŽE:

Delna urejenost je mreža, če za $\forall a,b \in M$ $\exists \sup(a,b)$ in $\exists \inf(a,b)$.

Primer: $(D(60), |)$ je mreža? je.

$2 = \inf(4,6)$ $\quad$ $12 = \sup(4,6)$

$\inf(a,b) \sim \gcd(a,b)$ $\quad$ $\sup(a,b) \sim \operatorname{lcm}(a,b)$

Primer 2: $A = \emptyset$ $(P(A), \subseteq)$ $X \leq Y \equiv X \subseteq Y$

$A = \{1,2,3,4\}$ $\quad$ $\inf(\{1,2\}, \{2,3\}) \sim \{2\}$

$\sup(\{1,2\}, \{2,3\}) \sim \{1,2,3\}$

$\inf(B, C) \sim B \cap C$

$\sup(B, C) \sim B \cup C$

ALGEBRAIČNA DEF. MREŽE

: Algebrajska struktura $(M, \vee, \wedge)$ je MREŽA, če veljajo:

- Idempotentnost $a \vee a = a$ $\quad$ $a \wedge a = a$
- Komutativnost $a \vee b = b \vee a$ $\quad$ $a \wedge b = b \wedge a$
- Asociativnost $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Absorpcija $a \vee (a \wedge b) = a$

Zgled: Izjavni račun: $(\{1,0\}, \wedge, \vee)$

ZVEZA MED ALG. IN REL. MREŽO:

$(M, \wedge, \vee)$, $(M, \leq)$

$a \vee b \equiv \sup(a,b)$

$a \wedge b \equiv \inf(a,b)$

[OMEJENOST IN KOMPLEMENTARNOST]

Mreža je omejena, če $\exists 0, 1 \in M \ni \forall x \in M: 0 \leq x \leq 1$

vsaka končna mreža je omejena TRDITEV

$M=\{a_1,\dots a_k\}$ najmanjši element: $a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_k$

največji element $a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_k$

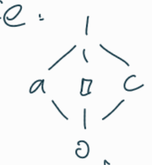
b je komplement a, če $a\vee b=1$ in $a\wedge b=0$

↳le na omejenih mrežah.

MREŽA JE KOMPLEMENTARNA, ČE ∃komplement za $\forall x\in M$.

obstajajo mreže, kjer imajo nekateri elementi več kot en komplement

Primer mreže:



$a\wedge b\sim 0$ $\quad a\wedge c\sim 0$

$a\vee b\sim 1$ $\quad a\vee c\sim 1$

v tej mreži ima a dva komplementa.

DISTRIBUTIVNE MREŽE.

MREŽA je distributivna, če veljata oba distributivna zakona:

- D1: $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
- D2: $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

IZREK: če velja v neki mreži D1, velja v njej tudi D2

-||- D2 -||- D1

DOKAZ: D1 ⇒ D2

$$a\vee(b\wedge c)\overset{abs}{=}a\vee\boxed{(a\wedge c)\vee(b\wedge c)}\longrightarrow D1$$

$$\overset{dist1}{=}a\vee\boxed{((a\vee b)\wedge c)}$$

[D.N.]

D2⇒D1

$$\overset{Abs}{=}[a\wedge(a\vee b)]\vee[(a\vee b)\wedge c]$$

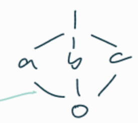
$$\overset{kom}{=}[(a\vee b)\wedge C]\vee[(a\vee b)\wedge c]$$

$$\overset{dist1}{=}(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

ALI JE VSAKA MREŽA DISTRIBUTIVNA?

recimo tale

M_5



$$\underbrace{a\wedge\underbrace{(b\vee c)}_{1}}_{a}=\underbrace{\underbrace{(a\wedge b)}_{0}\vee\underbrace{(a\wedge c)}_{0}}_{0}$$

$a\neq 0$

mreža ni distributivna, protiprimer.

tak pa tale

N_5

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$\underbrace{a\wedge 1}_{a}=\underbrace{b\vee 0}_{b}\qquad a\neq b$$

ni distributivna.

IZREK 3: (BIRKHOFFov izrek)

„mreža je distributivna ⟺ ne vsebuje M_5 in N_5 kot podmreže!

↳ ⇒ in ⇐

Def.: „podmreža" := let $(M,\wedge,\vee)$ mreža in hkrati $\emptyset\neq N\subseteq M$.

naj velja $\forall a,b\in M: \underset{\text{inf}}{a\wedge b}\in M$ in $\underset{\text{sup}}{a\vee b}\in M$

tedaj ⇒ $(N,\wedge,\vee)$ je podmreža v $(M,\wedge,\vee)$

[BOOLOVA ALGEBRA]

$\sim$ je komplementarna distributivna mreža.

TRDITEV 10: V Boolovi Algebri ima $\forall$ element natanko en komplement

$$\forall x \in S: \exists! y: x \wedge y \sim 0 \text{ in } x \vee y \sim 1$$

DOKAZ: b, c sta komplementa a.

$b=c$. DOKAZ:

$$\begin{aligned}
b &= b \wedge 1 \\
&= b \wedge (a \vee c) \\
&\overset{dist}{=} (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \\
&= 0 \vee (b \wedge c) \\
&= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\
&\overset{dist}{=} c \wedge (a \vee b) \\
&= c \wedge 1 \\
&= c
\end{aligned}$$

$b = c$ □

simbol za komplement x: $\neg x$

TRDITEV 11: Pri Boolovi algebri veljata DeMorganova zakona.

$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ in $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &\overset{?}{=} 0 \\
(a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) &\overset{?}{=} 0 \\
(0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) &\overset{?}{=} 0 \\
0 \vee 0 &\overset{?}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &\overset{?}{=} 1 \\
(a \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a \vee \neg b) &\overset{?}{=} 1 \\
(1 \vee \neg b) \wedge (1 \vee \neg a) &\overset{?}{=} 1 \\
1 \wedge 1 &= 1
\end{aligned}$$

BOOLOVO ALGEBRO OZNAČIMO: $(B, \vee, \wedge, \neg)$

DUALNOST:

$B = (B, \vee, \wedge, \neg)$

$B^* = (B, \wedge, \vee, \neg) \rightarrow$ obrnemo Hassejev diagram

VELJA: za vsako trditev T v B $\exists$ dualna trditev T^* v B^*, ki jo dobimo tako, da zamenjamo $\vee$ in $\wedge$.

B		B^*
1	...	0
$x \quad \bar{x}$		$x \quad \bar{x}$
0		1

$x \wedge \bar{x} = 1$

$x \vee \bar{x} = 0$

$D_1^* = D_2 \qquad D_2^* = D_1$

Opis Boolovih Algeber (Stoneov izrek)

Zgled: $A \neq \emptyset \qquad B = (P(A), \cup, \cap, {}^c)$

$$X^c := A \setminus X$$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Dist velja.

Je omejena, ... veljajo vse lastnosti Boolove algebre.

STONEOV IZREK (izrek 12):

„Vsaka Boolova algebra je izomorfna Boolovi Algebri $(P(A), \cup, \cap, {}^c)$ za neko množico A."

↳ posledično je vsaka boolova algebra reda 2^n.

FUNKCIJE

Def: „funkcija" := „enolična relacija"

↳ $f \subseteq A \times B$

$\forall x \in A,\ y_1, y_2 \in B : (xfy_1 \wedge xfy_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$

funkcija f je PRESLIKAVA iz A v B, če velja

$D_f = A$ (medtem ko pri navadni funkciji je pogoj D_f manj strog: $D_f \subseteq A$)

$A \equiv D_f$ (domena)

$B \equiv$ kodomena

slika/zaloga vrednosti: $Z_f = \{ y \in B ; \exists x \in A \ni xfy \}$

$B^A = \{ f ; f : A \to B \}$

IDENTITETA: $id_A : A \to A \quad id_A(x) = x$

VLOŽITEV/EMBEDDING: $i : A \to B \quad A \subseteq B \quad i(x) = x$

PROJEKCIJA NA i-to KOMPONENTO: $1 \leq i \leq n$

$P_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow A_i$

$P_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$

NARAVNA/KANONSKA PROJEKCIJA

$A ; R$ (ekv. rel)

$p : A \to A/R \qquad$ t.j.: $p(A) = R[a]$

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA za A

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in A \\ 0 ; & x \notin A \end{cases}$

ZOŽITEV:

$f : A \to A \qquad A_1 \subset A$

$f_{|A_1}(x) = f(x)$ za $\forall x \in A_1$

$f_{|A_1} : A_1 \to B$

ZGLED.

$f \subseteq A \times B$

f je injektivna, kadar velja:

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

f je surjektivna, kadar velja:

$Z_f = B \to$ kodomena

↳ zaloga vrednosti

kakšna je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = 2x$? je inj, ni surj.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad f(x) = x^2$ ni inj, je surj.

[Inverzna funkcija]

$f \subseteq A \times B \qquad f^{-1}$ je inverzna relacija. Inverzna relacija obstaja.

Kdaj je inverzna relacija funkcija?

Kdaj je inverzna relacija ... funkcija
kdaj je, ima f inverzno funkcijo.

TRDITEV: $f \subseteq A \times B$. f je funkcija. Potem:

ⓐ Relacija f^{-1} je funkcija
$\Leftrightarrow$ f je injektivna.

ⓑ Relacija f^{-1} je preslikava
$\Leftrightarrow$ f je bijektivna

f^{-1} je funkcija $\Leftrightarrow \left(x f^{-1} y \text{ in } x f^{-1} z \Rightarrow y = z. \right) : \forall y,z \in B,\ x \in A$

$\sim$

$y f x \text{ in } z f x \Rightarrow y = z : \forall y,z \in B, x \in A.$

$\sim$

f je injektivna.

f^{-1} je preslikava $\Leftrightarrow (f^{-1}$ je funkcija in $D_{f^{-1}} = B)$.

f je surjektivna

KOMPOZITUM

$g(f(x)) = g \circ f$ $\qquad f : A \to B \qquad g : B \to C$

$(g \circ f) : A \to C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

TRDITEV 2:

$f \subseteq A \times B \quad g \subseteq B \times C$

$$g \circ f = f * g$$

DOKAZ: vzemimo poljubna x, y, da $x (f*g) y$.

tedaj $\exists z \in B : (x f z \wedge z g y)$, to je

$\exists z : f(x) = z$ in $g(z) = y$

$\Leftrightarrow g(f(x)) = y$

$\Leftrightarrow (g \circ f)(x) = y$

N

Dokaži: f, g sta funkciji. $\Rightarrow g \circ f$ je funkcija

$f \subseteq A \times B \quad g \subseteq B \times C$ $\qquad$ [D.N.]

Dokaži: f, g sta preslikavi $\Rightarrow$ $g \circ f$ je preslikava

pokaži, da je $f * g$ ecolična relacija.

VELJA: $f : A \to B$ $\quad$ f je preslikava

- $f \circ id_A = f = id_B \circ f$
- f je injektivna $\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = id_A$ $\qquad$ [D.N.]
- f je surjektivna $\Leftrightarrow f \circ f^{-1} = id_B$

TRDITEV: preslikavi: $f : A \to B$, $g : B \to C$

1. f, g injekciji $\Rightarrow g \circ f$ injekcija

2. f, g surjekciji $\Rightarrow g\circ f$ surjekcija

3. $g\circ f$ injekcija $\Rightarrow f$ injekcija

4. $g\circ f$ surjekcija $\Rightarrow g$ surjekcija

$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y) \Rightarrow x = y$

$\Downarrow$

$g(f(x)) = g(f(y))$

$\Downarrow$ g je inj. predpostavka

$f(x) = f(y)$

$\Downarrow$ f inj. predpostavka

$x = y$ ✓

2.

let $z \in C \overset{g \text{ sur.}}{\Rightarrow} \exists y \in B : g(y) = z$

f sur.

$\Rightarrow \exists x \in A : f(x) = y$

$\Rightarrow (g\circ f)(x) = z$

3. $(g\circ f)$ inj $\Rightarrow f$ inj.

↳ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ @ $x, y \in A$ ←?

$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x) \Rightarrow x = y$

$g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow y = x$

4. g je surj. $\Leftrightarrow \forall z \in C \, \exists y \in B : g(y) = z$

let z poljuben iz C

$\Rightarrow \exists x \in A : (g\circ f)(x) = z$

$g(f(x)) = z$

IZREK 4: naj za preslikavi $f : A \to B$, $g : B \to C$ velja $g\circ f = id_A$ in $f\circ g = id_B$

$\Rightarrow f, g$ sta bijekciji in velja $g = f^{-1}$ → BIJEKCIJI

3.: f je inj

4.: g je sur

3.: g je inj

4.: f je sur

g je bij.

f je bij.

dokažimo še $g = f^{-1}$ $(g : B \to A)$

...

[SLIKE in PRASLIKE]

$f \subseteq A \times B$ $\quad A_1 \subseteq A$ $\quad B_1 \subseteq B$

SLIKA množice $A_1 := f(A_1) = \{ y \in B;\ \exists x \in A_1 : f(x) = y \}$

PRASLIKA množice $B_1 := f^{-1}(B_1) = \{ x \in A : \exists y \in B_1 \ni : f(x) = y \}$

[D.N.] Preveri, če velja:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$$

$$f(f^{-1}(B_1)) = B_1$$