ANA3VFMF 2025-01-06 ob 10:42 (zamudil)

prvih 42 minut ne ni bilo

glej barbarine zapiske

s21fe/dcim/camera/

20250106_11*.jpg

f holomorfna na D in $K \subseteq D$ sklenjena velja

$$\oint_K f(z)\, dz = 0$$

pomeni, da je K sklenjen

N

Določi konstanto k tako, da bo $u(x,y) = e^x(\cos ky + \sin ky)$ realni del neke holomorfne fje $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, za katero velja $f(0) = 1$, in jo tudi izračunaj.

b.) izračunaj

$$\int_{[0,1+i]} f(z)\, dz$$

daljica od 0 do $1+i$

a.) $f(z) = u(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) + i \cdot v(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$

$f(0) = u(0,0) + i \cdot v(0,0) = 1$

HOLOMORFNOST:

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

$$v_x = -u_y = -\left(e^x(\cos kx + \sin kx)\right)' = -\left(e^x(-k\sin kx + k\cos kx)\right)$$

$$v = k\int e^x\left(\sin(ky) - \cos(ky)\right) dx = k\left(\sin(ky) - \cos(ky)\right)\int e^x\, dx =$$

$$= k(\sin ky - \cos ky)\, e^x + C(y)$$

izračun C iz $u_x = v_y$:

$\|$

$$e^x(\cos ty + \sin ty) = t^2 e^x(\cos(ty) + \sin(ty)) + C'(y)$$

$$C'(y) = e^x(\cos(ty) + \sin(ty))(1-t^2)$$

hmm. fja na levi je odvisna od y, na desni pa od x in y.
edini način, da je desna tudi odvisna le od y, je, da je $t = \pm 1$. toda potem takem je $C'(y) = 0$, torej $C(y) = C$.
neodvisna konstanta

najdimo ta C. $f(0)=1$ določi ta C:

$$f(0) = 1 = 1(1+0) + i(t\,1\,(0-1)) + iC =$$

$$= 1 - it + iC$$

$$iC = it$$

$$C = t$$

$$f(x,y) = e^x(\cos ty + \sin ty) + ite^x(\sin ty - \cos ty) + it$$

$$f(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos t \operatorname{Im} z + \sin t \operatorname{Im} z) + ite^{\operatorname{Re} z}(\sin t \operatorname{Im} z - \cos t \operatorname{Im} z) + it$$

$$= \dots = (1-it)e^z + it$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

takšen pogoj moraš uganiti za u, da je realni del vete holomorfne fje ?

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$\hookrightarrow$ laplace po u

... milnicar plosket, ki rabi najmanj energije

u je Harmonična funkcija

---

let f holomorfna na $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

rečemo: f ima v $a_1, \dots, a_n$ singularnosti.

od pravljiva
f se da razširiti holomorfno na te točke
samo nenegativni členi v Laurentovi vrsti

pol stopnje k
najnižji neničelni člen stoji pred z^{-k}

bistvena singularnost (ni pola niti ni odpravljiva)
∞ mnogo neničelnih členov oblike z^{-*}

če ima f pol v a, potem

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \dots + a_{-2}(z-a)^{-2} + \underbrace{a_{-1}}(z-a)^{-1} + \underbrace{a_0(z-a)^0 + a_1(z-a)^1 + a_2(z-a)^2 + \dots}_{\text{taylorjeva vrsta}}$$

Laurentova vrsta

a_{-1} se imenuje residu $F(f, a)$

$$\oint_{S^1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \, dz = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \cdot i e^{it} \, dt \xrightarrow[\text{konv.}]{\text{enak.}} i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt =$$

sfera

$= 0$, če $n \neq -1$

$= 2\pi$, $n = -1$

$$= 2\pi i \, a_{-1} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k)$$

$a_1, \dots, a_n$ so v notranjosti krivulje

N

določi Laurentove vrste v okolici singularnosti naslednjih ff:

a.) $f(z) = z e^{\frac{1}{z-1}}$

b.) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

in določi

$$\int_{K(0,R)} f(z) \, dz \qquad \forall R \neq 1$$

krožnica z radijem R

a.) $f(z) = z e^{\frac{1}{z-1}}$ singularnost v $z = 1$

$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$ vpelji $w = z - 1 \rightarrow z = 1 + w$

$$f(z) = z\left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^3}{6} + \dots\right) = (1+w)\left(1 + \frac{1}{w} + \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^3}{6} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{w} + \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^3}{6} + \dots + w + 1 + \frac{\frac{1}{w}}{2} + \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^2}{6} + \dots =$$

$$= 1 + w + \frac{1}{w} + 1 + \frac{w^{-2}}{2} + \frac{w^{-1}}{2} + \frac{w^{-3}}{6} + \frac{w^{-2}}{6} + \dots =$$

$$= w + 2 + \frac{3}{2} w^{-1} + \frac{4}{6} w^{-2} + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) w^{-3} + \dots$$

$$\int_{K(0,r)} f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}(f,1) = 2\pi i \frac{3}{2} = 3\pi i \ ; R>1 \\ 0 \ ; R<1 \\ \text{singularnost je bistvena} \end{cases}$$

b.) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$; singularnost: $z = \pm i$

razvoj za $a=i$, $w = z-i$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{w(w+2i)} = -\frac{i}{2} \frac{1}{w\left(1-\frac{iw}{2}\right)} = -\frac{i}{2w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iw}{2}\right)^n = -\frac{i}{2w} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\operatorname{Res}(f,i) = -\frac{i}{2}$$

singularnost je tipa pol stopnje 1.