ANA3VFMF 2024-10-07

„integrali na 10e6 načinov"

asist. Daniel Z. Vitas

knjiga: Dobovišek: Vaje za analizo

ocena: pisni izpit iz vaj + teoretični
ali — 2 kolokvija
└ izpit

dodatne točke: 3 kvizi na vajah
do 10% ocene iz vaj
napovedani

3x dodatne dodatne zelo težka D.N.
↳ prvi tujie dobijo ŠE VEČ točk !!1

N
$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2+x^2}\,dt = ?$$

Prvi način

$$\operatorname{atan}' t = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2+x^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+x^2}}\,dt = \frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+x^2}}\,dt =$$

$t=1$
$u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+u^2}\,du =$$

$t=0$
$u=0$

$$u=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dt$$
$$\sqrt{1+x^2}\,du = dt$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \operatorname{atan}(0)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{atan}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{atan} 1}{1} = \operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Drugi način: vstavi $x=0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2+x^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big|_0^1 \operatorname{atan} t = \frac{\pi}{4}$$

Ker je $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2+x^2}\,dt$ zvezna v $x=0$, to lahko storimo.

let $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$.

če je $f(x,t)$ zvezna na $\underbrace{[c,d]}_{\text{neka okolica } x_0}\times[a,b]$,

tedaj je F zvezna v x_0

V našem primeru vzamemo

$$f(x,t) = \frac{1}{1+t^2+x^2}\ ; \quad a=0,\ b=1;\quad c=-1,\ d=1.$$

zvezna je v 0, ker je elementarna in na definicijskem območju definirana.

opomba: pravkar smo študenti dobili učne liste.

N

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{t^2+x^2}\,dt.$$

a) poišči D_F

b) dokaži, da je F gladka → neskončnokrat odv.

edina težavna točka:

- $t=0$; $x=0$ (imenovalec je 0)

integrali $\int_0^1 \frac{1}{t^s}\,dt$ konvergirajo $\iff s<1$

$D_F = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

fiksirajmo $x=0$.

$$\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

$$\frac{\cos t}{t^2} \approx \frac{1}{t^2}$$

t skoraj 0

ali $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}\Big|_0^1 \to \infty$ konvergira? ne!

torej divergira tudi $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$

b.) $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ je zvezno odvedljiva, če

- f je zvezna, zvezno parcialno odvedljiva

in tedaj $F'(x) = \int_a^b f_x(x,t)\,dt$

- F iz naloge je odvedljiva, ker je f povsod definirana el. fja, in F_x iz naloge je zvezna:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos t}{t^2+x^2} = \cos t \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{t^2+x^2} = -\frac{2x \cdot \cos t}{(t^2+x^2)^2}$$ je el. fja,

zato zvezna.

- F iz naloge je dvakrat odvedljiva, ker je F' odvedljiva po istem izreku itd. vzorec je baje očiten.

- ponavljamo v neskončnost $\Rightarrow F \in C^\infty$

N

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,dt$$

izrazi z el. fjami

a.) dokaži zveznost F na $(-1, \infty)$

b.) utemelji, da je odvedljiva in izračunaj F'

problematične točke : $t=0$ ni problem

$xt \leq -1$ se ne more zgoditi, (*) ker $x \in (-1,\infty)$, $t \in [0,1]$.

$$\frac{\ln(1+xt)}{t} \approx \frac{xt}{t} = x \Rightarrow \int_0^1 x\,dt = x < \infty \text{ super, konvergira}$$

$t << 1$

↳ t zelo majhen

prvi člen tayl. vrste

$\ln(1+y) \approx y$ za majhen y

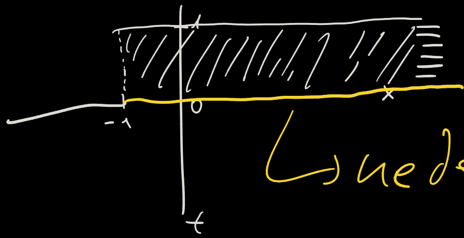
$D_F = (-1, \infty)$

F je zvezna na D_F

sledi, če dokažemo zveznost $f: \frac{\ln(1+xt)}{t}$ na $(-1,\infty)_x \times [0,1]_t$

je zvezna, ker je elementarna in definirana.

$\mathbb{R}^2$ brez $t \neq 0$



nedefinirano

preverimo limitiranje proti tej premici:

f je zvezna tudi na ——, če

$\forall x_0 \in (-1,\infty) \quad \exists \lim_{(x,t)\to(x_0,0)} f(x,t)$

POMNI: L.H. dela le pri enodimenzionalnih limitah! Produktno pravilo pa dela. Če zmeraj pa lahko uporabimo Taylorjev 1. člen za dokazovanje konvergence.

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \frac{\ln(1+xt)}{t} = \lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \frac{\ln(1+xt)}{xt}\, x =$$

$$= \lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \frac{\ln(1+xt)}{xt} \cdot \lim_{(x,t)\to(x_0,0)} x =$$

enodim. lim.

$u = xt$

$$= x_0 \cdot \lim_{\substack{xt \to x_0 \cdot 0 \\ u \to 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = x_0 \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \overset{L.H.}{=} x_0 \lim_{u\to 0} \frac{1}{1+u} = x_0$$

b) F odvedljiva, če f zvezna, f_x zvezna

$$F'(x) = \frac{d\left(\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\, dt\right)}{dx} = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+xt)}{t}\right)' dt = \dots$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\ln(1+xt)\right)' = \int_0^1 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+xt} \cdot t\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{x}\ln(1+xt)\Big|_0^1 = \frac{1}{x}\ln(1+x) - \underbrace{\cancel{\frac{1}{x}\ln(1)}}_{\to 0} = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

utemeljitev: f_x zvezna

$f_x = \dfrac{1}{1+xt}$ je elementarna in definirana na $(-1,\infty)_x \times [0,1]_t$ in $(*)$