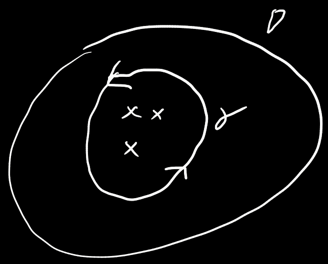
ANA3PFMF2025-01-14

spomnimo: $D \subset \mathbb{C}$ brez lukenj



f hlmf na $D \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$

γ obkroži singularnosti 1x ✓

pozitivni smeri.

izrek o residuih

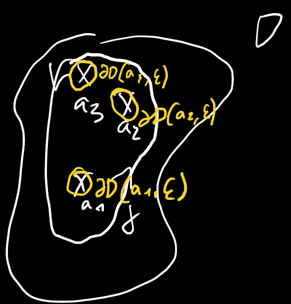
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

Skica dokaza: za singularnost $a \in D$ in majhen $\varepsilon > 0$ velja

$$\int_{\partial D(a,\varepsilon)} f(z)\,dz = \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,dz = 2\pi i\, c_{-1}$$

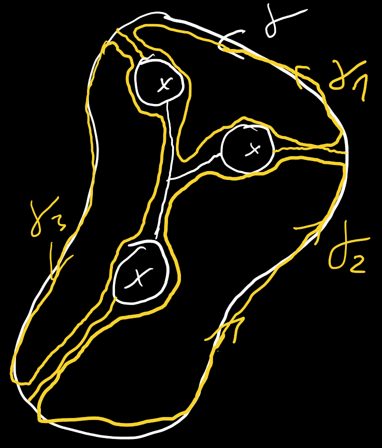
za $n \geq 0$ vemo, da so $(z-a)^n$ hlmf, za $n < -1$ smo dokazali, da izginejo.

sedaj imejmo splošno situacijo za primer $m = 3$, t.j. treh singularnosti



če se omejimo na $D \setminus \bigcup_{j=1}^{m} D(a_j, \varepsilon)$ za nek majhen $\varepsilon > 0$, je f tam hlmf.

ključen trik je v razrezu.



vsaka od $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ oklepa območje, kjer je f hlmf

torej velja, da je

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0,$$

ker $\overset{\parallel}{0}$, $\overset{\parallel}{0}$, $\overset{\parallel}{0}$

zaradi odštevanj pri orientaciji pa opazimo, da je

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\partial D(a_1,\varepsilon)} f(z)\,dz - \int_{\partial D(a_2,\varepsilon)} f(z)\,dz - \int_{\partial D(a_3,\varepsilon)} f(z)\,dz = 0$$

torej je $$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial D(a_j,\varepsilon)} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_j)$$

[5 geometrijski in analitični pomen holomorfnosti]

Če sta u in v zvezno odvedljivi na $D \subseteq \mathbb{C}$, je

$f = u + iv$ hlmf $\Leftrightarrow$ velja CRS

$u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$.

Kasneje smo ugotovili tudi, da so take f-je $\in C^\infty$.

odvajamo CRS še enkrat:

$$u_x = v_y \;\Big/ \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$$

$u_y = -v_x \quad / \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$

ker je v kvadrat zvezno odvedljiva, velja

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

$$\Downarrow$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

podobno velja za v.

$u_x = v_y \quad / \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow u_{xy} = v_{yy}$

$u_y = -v_x \quad / \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow u_{yx} = -v_{xx}$

$$\Rightarrow v_{yy} = -v_{xx}$$

def: fja $u: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je harmonična, če zanjo velja, da $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

↳ laplaceov operator.

Dokazali smo naslednjo izjavo:

izrek: Re in Im del holomorfne fje sta harmonični fji.

izkaže se, da kljub za poljubno harmonično f-jo

$u: D \to \mathbb{R}$, kjer je D brez lukenj, najdemo harmonično

f-jo $v: D \to \mathbb{R}$, za katero je $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$

holomorfna.

tej f-ji rečemo harmonična konjugiranka f-je u

in je enolična do realne konstante natančno.

ne bomo dokazali. primer:

$$u = x^2 - y^2 \text{ na } \mathbb{R} \text{ oz } \mathbb{C}$$

preverimo harmoničnost:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$$

poiščimo v, da bo $u + iv$ holomorfna (CRS).

$$u_x = v_y \to v_y = 2x \to v = 2xy + C(x)$$

$$u_y = -v_x \to v_x = -(-2y) = 2y \to$$

$$v = 2xy + C(y)$$

oba pogoja hkrati izpolnjuje

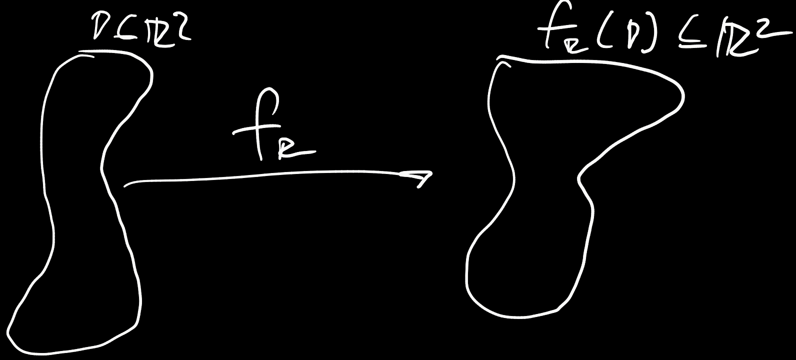
$$v = 2xy + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

je harmonična konjugiranka

$f = u + iv$ je holomorfna

$$\mathbb{C} \quad x^2 - y^2 + 2xyi + iC = (x+iy)^2 + iC = z^2 + iC$$

Še ena posledica CRS pa ima bolj geometrijsko ozadje. Oglejmo si holomorfno fjo $f = u + iv$ kot realno preslikavo $f_R = (u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



Taka preslikava ima Jacobijevo matriko.

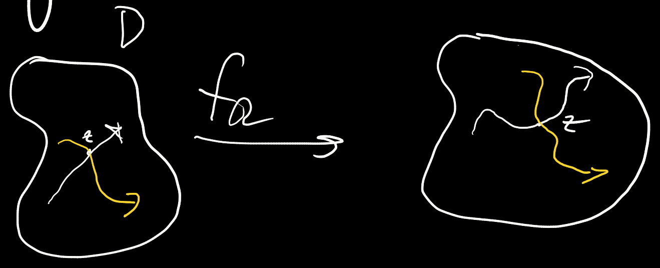
$$J_{f_R} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \overset{CRS}{=} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{bmatrix}$$

$\det J_{f_R} = u_x^2 + u_y^2 \neq 0$, razen, če

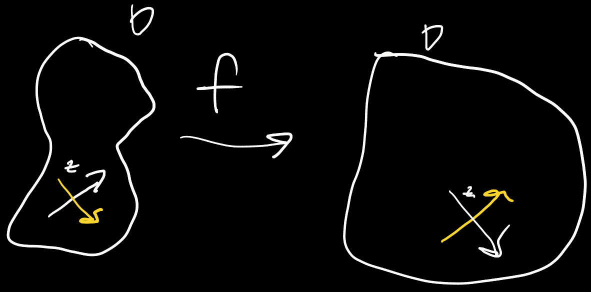
$$u_x = v_y = 0 \text{ in } u_y = -v_x = 0$$

$\Rightarrow$ ugotovitev I.

Če za holomorfno fjo $f : D \to \mathbb{C}$ velja, da je $f'(z) \neq 0$, preslikava f_R v tej točki ohranja orientacijo



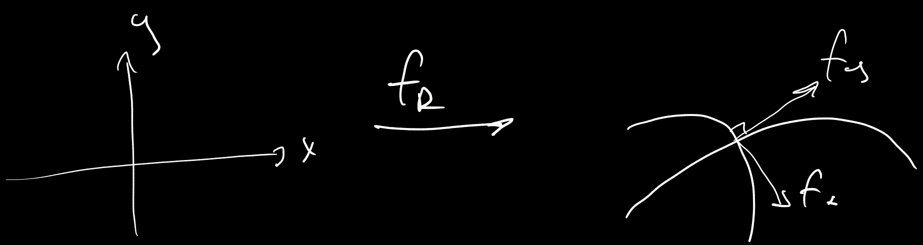
lokalni koordinatni sistem ohrani orientacijo.



tu pa je primer, kjer se orientacija obrne, recimo

$f(z) = \bar{z}$

nadalje si oglejmo sliko obeh koordinatnih krivulj



$$f = (u,v) \Rightarrow f_x = (u_x, v_x)$$

$$f_y = (u_y, v_y) \underset{\text{CRS}}{=} (-v_x, u_x)$$

ugotovimo: $f_x \cdot f_y = -u_x v_x + v_x u_x = 0$

tj. $f_x \perp f_y$ tj. preslikava ohranja pravi kot med osjo x in y v sliki. Še več, to velja za vse točke.

ugotovitev I.

hlmf $f: D \to \mathbb{C}$ v tč., kjer $f'(z) \neq 0$ na infinitezimalni ravni ohranja kote.

Def.: preslikavi, ki ohranja kote in orientacijo, rečemo KONFORMNA.

dokazali smo

izrek: holomorfne fje so konformne v točkah, kjer $f'(z) \neq 0$.

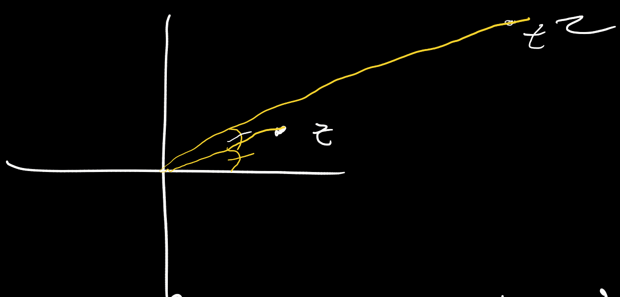
nekaj primerov:

- kvadriranje: $f(z) = z^2$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 2z = 0 \iff z = 0$$

izven te točke pa je konformna.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \; ; \; z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$$



oglejmo si delovanje na I. kvadrantu.

ohranijo se pravi koti in orientacija

$$- f(z) = e^z$$

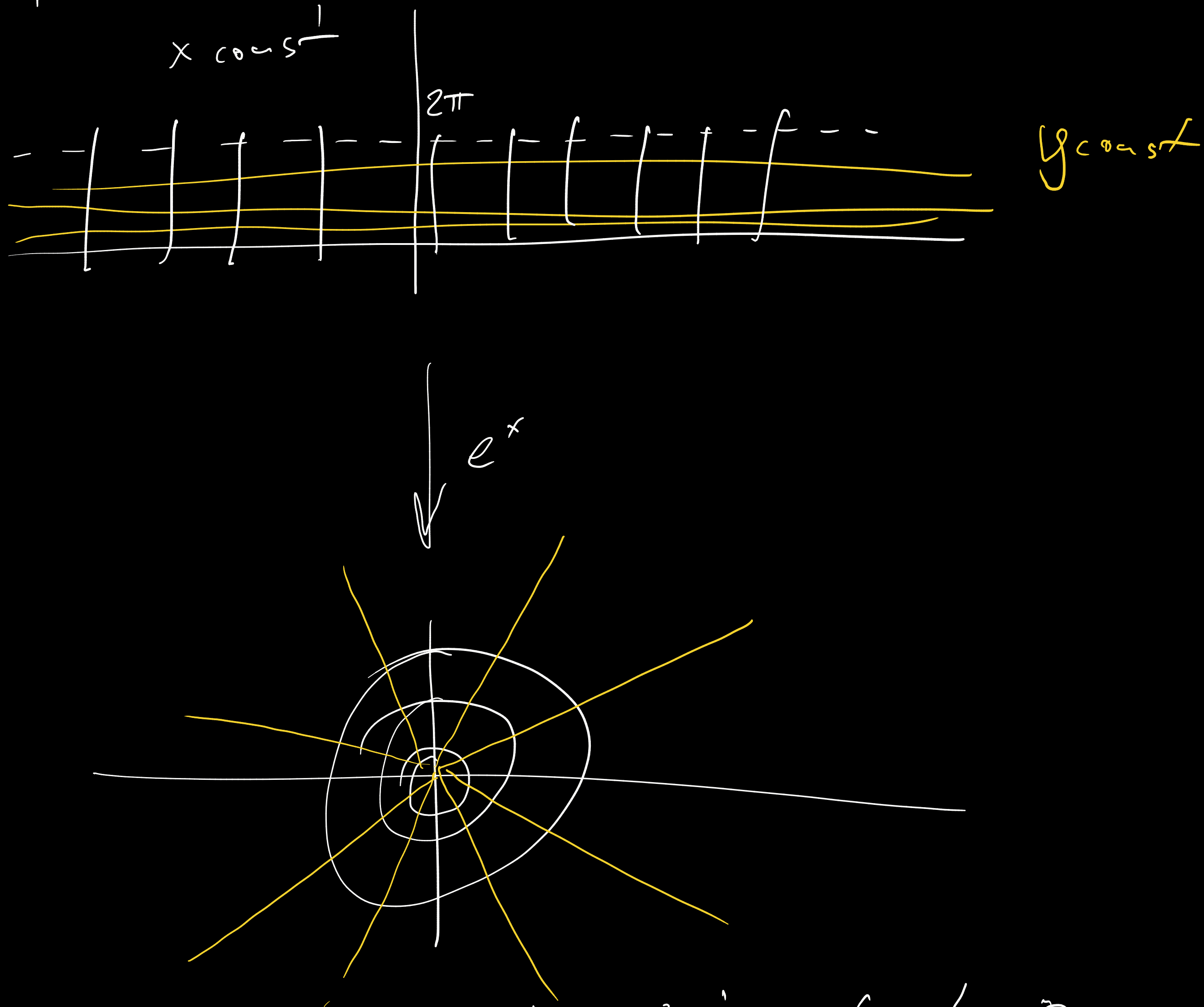
odvod te fje je $(e^z)' = e^z \neq 0$. ta preslikava je povsod konformna.

zapišimo z eulerjevo formulo:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

omejimo si delovanje na poltrak

$$\mathbb{R}\times[0,2\pi)$$



ohranita se pravokotnost in orientacija.

opazimo, da je f bijekcija

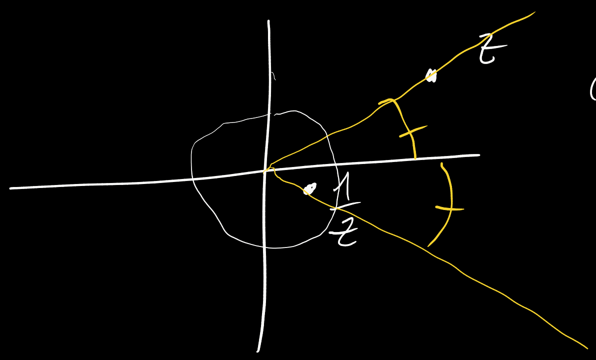
$$\mathbb{R}\times[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

[3 INVERZIJA]

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

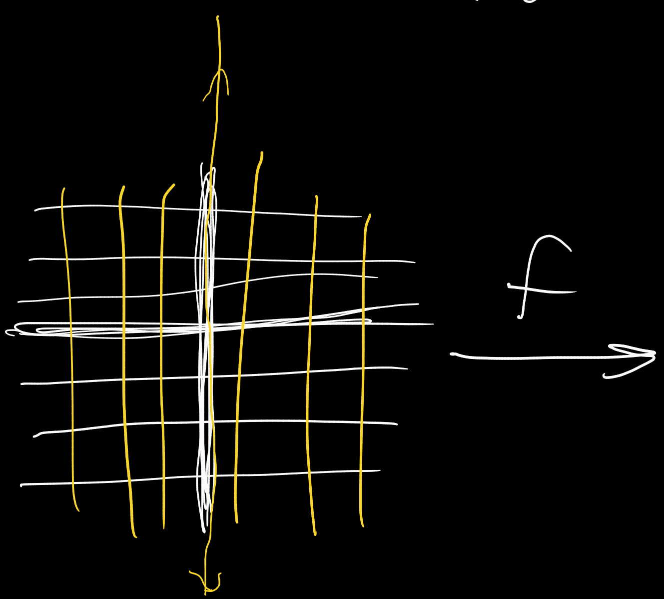
ta fja je def. na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

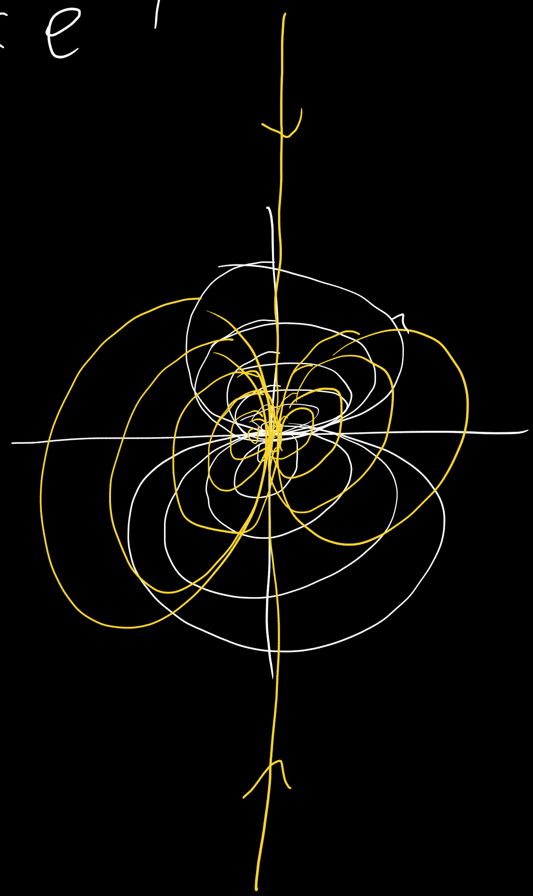
$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0 \longrightarrow \text{povsod konformna}$$



opazimo, da je bijektivna in sama sebi inverz.

$$\frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$





koti se ohranijo

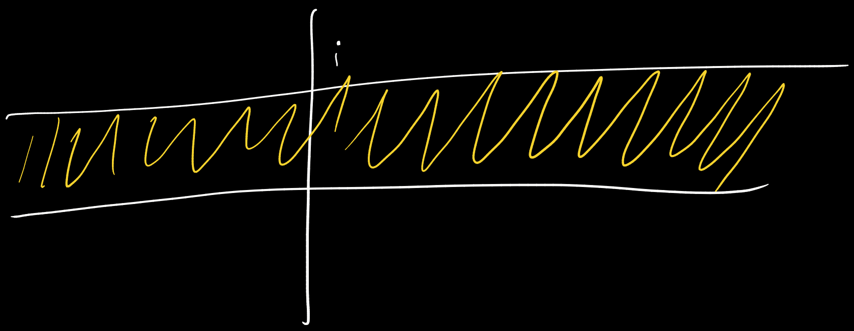
orientacija tudi

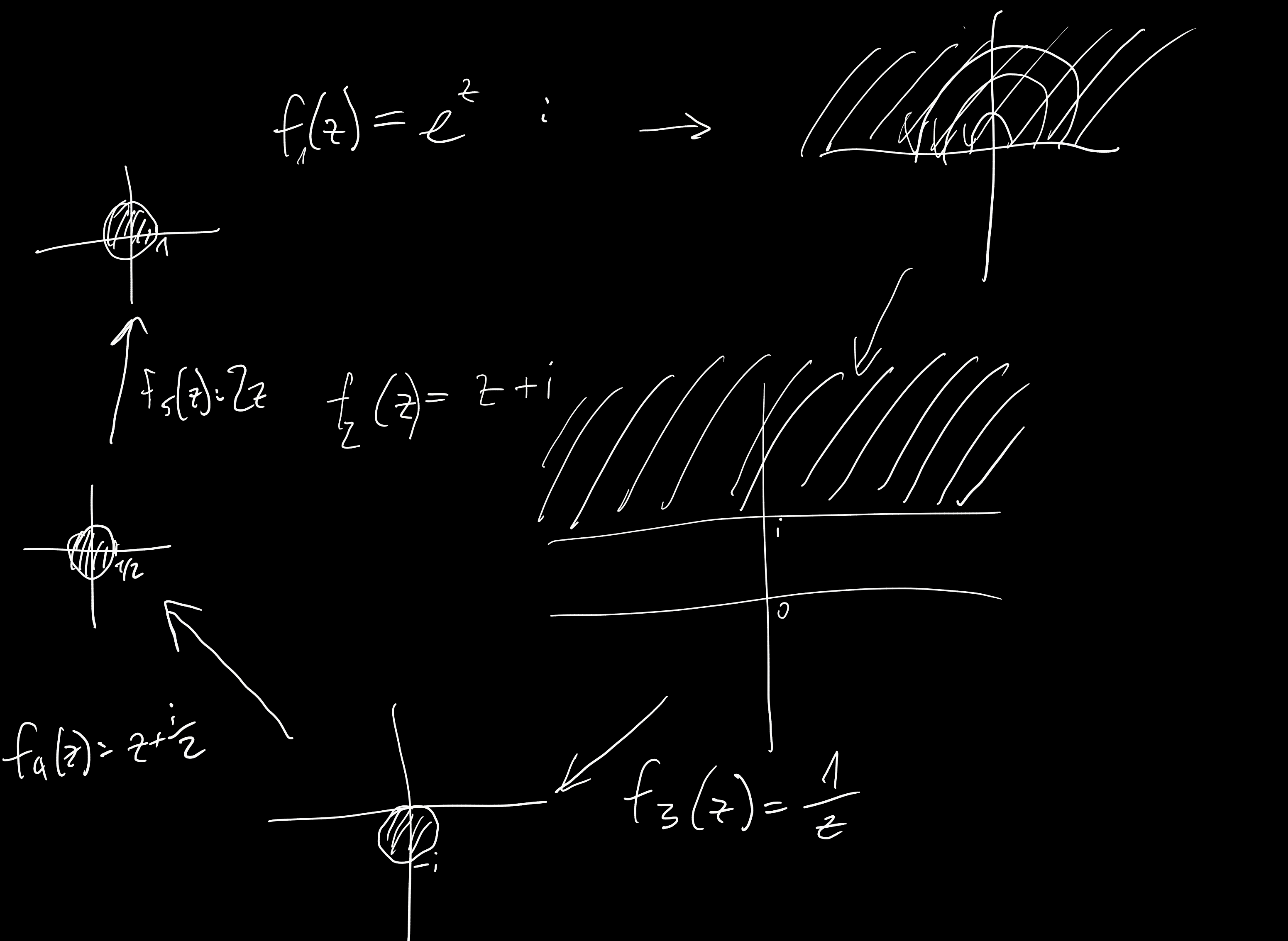
Zanimivi opazki: • $f(z) = \frac{1}{z}$ slika premice, ki ne potekajo skozi izhodišče, v krožnice, ki gredo skozi izhodišče, in obratno.

• $f(z) = \frac{1}{z}$ slika premico, ki gre skozi izhodišče nazaj v premico, ki gre skozi izhodišče (ampak ne nujno).

N

Poišči konformno preslikavo, ki pas $\mathbb{R} \times i[0, \pi]$ preslika v enotski disk





$$f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) =$$

$$= f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(z))))) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{e^z + i} + \frac{i}{2} \right) = \frac{2}{e^z + i} + i$$