ANA3P FMF 2025-01-07   zamudil vse 3 ure. glej
zapiske v S21fe/dcim/Camera/20250107_14*.jpg

---

prepisal 2025-01-11 in 2025-01-12

Izrek: Naj $D \subset \mathbb{C}$ območje in $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfna.
Tedaj $\forall a \in D \; \exists R > 0$, da lahko na disku $D(a,R) \subset D$
funkcijo f razvijemo v potenčno vrsto

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

t.j. holomorfne fje so kompletno analitične ($R \neq 0$).

Ideja dokaza: Naj $R > 0$ tak, da je $D(a,R) \subset D$. Upoštevaj se
Cauchyjeva integracijska formula, ki velja za holomorfne
fje.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,R)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw.$$

Formula pove, da lahko za $z \in D(a,R)$ izračunamo $f(z)$
z integralom po $\partial D(a,R)$. BŠS naj bo a kar $a = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,R)} \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} \overset{\text{geom. vrsta}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,R)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw =$$

$\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, ker $z \in D(0,R)$ in $w \in \partial D(0,R)$,
t.j. $|z| < R$ in $|w| = R$.

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw \; z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

enakomerna konvergenca c_n vrste

Posledice izreka:

1.) Pri realnih fjah smo ugotovili, da je analitičnost močnejši pogoj kot gladkost. t.j. če lahko $f(x)$ na okolici a razviješ v Taylorjevo vrsto, so na tej okolici vsi odvodi $f^{(n)}(x)$ zvezni. Enako velja za holomorfne fje. t.j. če $\exists f'(z)$, $\exists$ vsi $f^{(n)}(z)$ na D.

2.) Ničle holomorfne fje so vedno izolirane. To pomeni, da če je $f \neq 0$ in $f(a)=0$, potem na neki okolici a velja $f(z) \neq 0$, razen za $f(z=a)=0$. To drži, ker če je $f(a)=0$, to za razvoj pomeni, da je $c_0=0$, morda pa je ničelnih še nekaj drugih začetnih koeficientov, t.j.

$$f(z) = \underset{\neq 0}{c_k}(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots, \quad k \geq 1,$$

sedaj izpostavimo $(z-a)^k$:

$$f(z) = (z-a)^k \underbrace{\left(c_k + c_{k+1}(z-a) + c_{k+2}(z-a)^2 + \dots\right)}_{g(z)}$$

fja g je hlmf in $g(a) = c_k \neq 0$. Torej $g(z) \neq 0$ tudi na okolici a zaradi zveznosti. Torej ima

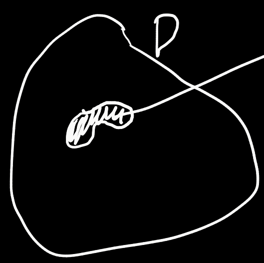
$f(z) = (z-a)^k g(z)$ na tej okolici ničlo le v $z=a$.

Temu rečemo, da ima f ničlo reda k v a.

3. Princip identičnosti: denimo, da sta $f: D \to \mathbb{C}$ in $g: D \to \mathbb{C}$ hlmf in velja $f=g$ na odprti podmnožici P, ali vsaj na množici, ki ima v D stekališče.

Potem je $f=g$ na celem D. Zakaj je to res?

$h=f-g$ je hlmf in ima ničle na odprti množici, ki ni diskretna. Zato mora biti $h=0$. Ta lastnost pove, da je hlmf bistveno strožji pogoj kot na primer zveznost ali gladkost.



če se ta ujemata f in g, se ujemata povsod.

Posledica 3. je tudi, da se vsi razvoji v Taylorjevo vrsto prenesejo na hlmf fje.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad ; \quad |z| < 1$$

na ta način definiramo kompleksna sin in cos.

Primer: razvijmo $\frac{1}{2+z}$ okoli $z=1$. Ta fja je hlmf na $D = \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, zato jo lahko razvijemo v vrsto na $D(1,R)$ za nek $R>0$.

Direktno: $f(z) = \frac{1}{2+z} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3}$

$$f'(z) = \frac{-1}{(2+z)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{9}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(2+z)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2!}{3^3}$$

$$f'''(z) = \frac{-3\cdot 2}{(2+z)^4} \Rightarrow f'''(1) = \frac{-3!}{3^4}$$

Taylorjevi koeficienti so $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ za razvoj v $z=a$.

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(z-1) + \frac{2!}{2!\cdot 27}(z-1)^2 - \frac{3!}{3!\,3^4}(z-1)^3 + \dots$$

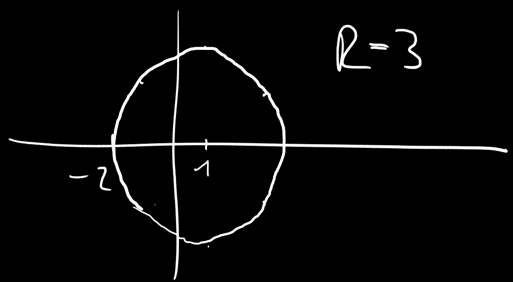
Preko znanega razvoja:

geom. vrsta

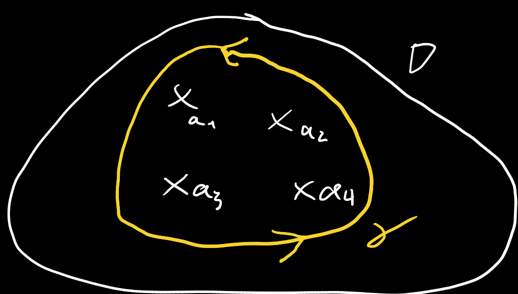
$$f(z) = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2+(z-1)+1} = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z-1)(-1)}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$$

Od tod preberemo tudi, da je razvoj dober za $\left|\frac{(-1)(z-1)}{3}\right| < 1$

oz. $|z-1| < 3$



4. izrek o residuih: Povedali smo, da za hlmf f-je na $D\subset\mathbb{C}$ brez lukenj velja Cauchyjev izrek, t.j. $\int_\gamma f(z)\,dz$ za $\gamma\subset D$ sklenjeno. V tem razdelku pa nas bo zanimalo, kaj se zgodi, če γ obkroži končno mnogo točk v katerih f ni hlmf (singularnosti), t.j. če je f hlmf na $D\setminus\{a_1,\dots,a_m\}$



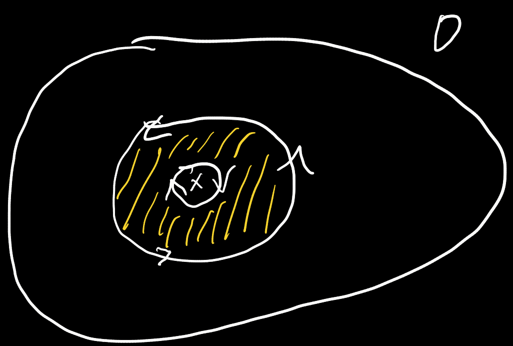
izrek (Laurentov razvoj): Let $D \subset \mathbb{C}$ območje in f hlmf na $D \setminus \{a\}$ za nek $a \in D$. Tedaj $\exists R > 0$, da lahko f na $D(a,R)$ razvijemo v Laurentovo vrsto

$$f(z) = \dots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \dots =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ideja dokaza: Izbereš $R > 0$ in $\varepsilon > 0$, da je kolobar

$K(a, \varepsilon, R) = D(a,R) \setminus D(a,\varepsilon) \subset D$



na njem lahko uporabiš Cauchyjevo integracijsko formulo:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,\varepsilon,R)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\partial D(a,R)} \# - \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \#\Big)$$

Prvi sumand je enak kot v prejšnjem razvoju in porodi hlmf del c_n, $n \geq 0$. Pri drugem pa sedaj velja (BŠS $a = 0$)

$$\int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = -\int \frac{-f(w)}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{z}}\, dw$$

$\hookrightarrow z \in K(a,\varepsilon,R)$; t.j. $|z| > \varepsilon$; $w \in \partial D(0,\varepsilon)$

t.j. $|w| = \varepsilon$; $\left|\frac{w}{z}\right| < 1$

Terminologija: Glede na Laurentov razvoj ločimo 3 tipe singularnosti

1) Odpravljiva singularnost: če so $c_n = 0$ za $n < 0$

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

to pomeni, da je f v resnici dobro definirana in hlmy tudi v $z=a$ in je $f(a)=c_0$

2) pol stopnje $k \in \mathbb{N}$, če je $c_n = 0$ za $n < -k$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-(k-1)}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

t.j. $(z-a)^k \cdot f(z)$ je hlmy in k je najmanjše naravno število s to lastnostjo.

3.) Bistvena singularnost: če ostaja neskončno mnogo neničelnih koeficientov pri negativnih potencah

zgledi: • $f(z) = \frac{1}{2+z}$

prej smo ugotovili, da f lahko razvijemo v običajno potenčno vrsto okoli $a=1$. To je točka odpravljiva singularnost. Po drugi strani pa je $\frac{1}{2+z} = \frac{c_{-1}}{z+2}$ in je v $a=-2$ pol stopnje $k=1$.

• $f(z) = \frac{1}{z^2(1+z)}$ razvoj okoli $a=0$:

$$\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z^2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + \dots$$ To je pol 2. stopnje.

razvoj okoli $a=-1$:

$$\frac{1}{z^2(1+z)} = \frac{1}{1+z}\left(\frac{1}{(z+1)-1}\right)^2 = \frac{1}{z+1}\left(\frac{1}{1-(z+1)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{z+1}\left(1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{z+1}\left(1+2(z+1)+3(z+1)^2+\dots\right) = \frac{1}{z+1} + 2 + 3(z+1) + \dots$$

to je pol 1. stopnje. drugih singularnosti ta f-ja nima.

- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. singularnost $a=0$. Razvoj: $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots$

  To je bistvena singularnost, ker imamo ∞ mnogo negativnih potenc.

<u>Def:</u> f je meromorfna na $D \subset \mathbb{C}$, če ima le pole ali odpravljive singularnosti.

Ker nas zanimajo integrali takih f-j po sklenjenih krivuljah okoli singularnosti, si oglejmo integral tega razvoja po robu diska $\partial D(a,\varepsilon)$ za nek majhen $\varepsilon > 0$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

parametrizacija: $z(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

središče

polmer

$$dz = i\varepsilon e^{it}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\partial D(a,\varepsilon)} f(z)\,dz = \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\partial D(a,\varepsilon)} c_n (z-a)^n\,dz$$

Vemo: če je f-ja holom., je ta integral po Cauchyjevem izreku ničelen. Torej je $\int_{\partial D(a,\varepsilon)} c_n (z-a)^n\,dz = 0 \quad \forall n \geq 0$

Po drugi strani za $n<0$ velja: $\int_{\partial D(a,\varepsilon)} c_n (z-a)^n \, dz =$

$$= \int_0^{2\pi} c_n (a + \varepsilon e^{it} - a)^n \cdot i \varepsilon e^{it} \, dt = \int_0^{2\pi} c_n \varepsilon^n e^{int} \cdot i \varepsilon e^{it} \, dt =$$

$$= i \varepsilon e^{it} \varepsilon^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = i c_n \varepsilon^{n+1} \left(\int_0^{2\pi} \cos(n+1)t + i \sin(n+1) \, dt = \right.$$

$$= i c_n \varepsilon^{n+1} \left(\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - i \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

izjema: $n = -1$:

$$\int_{\partial D(1,\varepsilon)} c_{-1} (z-a)^{-1} \, dz = i c_{-1} \varepsilon^0 \int_0^{2\pi} e^0 \, dt = 2\pi i c_{-1}$$

Sklep: $\int_{\partial D(a,\varepsilon)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \, dz = 2\pi i c_{-1}$ za vsak $\varepsilon > 0$

Ker je c_{-1} edini preživeli koeficient, ima posebno ime: $c_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$ residuum, oz. ostanek f v $z = a$.

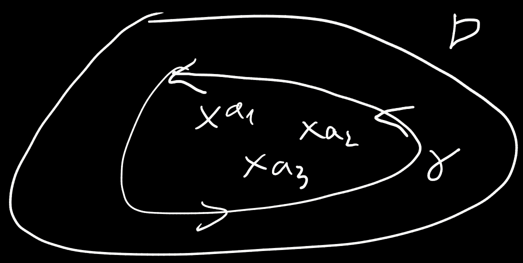
Posledica tega računa je naslednji izrek:

Izrek o ostankih in residuih:

Naj $D \subset \mathbb{C}$ brez lukenj, $f : D \to \mathbb{C}$ hlmf na $D \setminus \{a_1, \dots a_m\}$.
Naj γ sklenjena krivulja, ki singularnosti a_j, $1 \leq j \leq m$

obkroži enkrat v pozitivni smeri. Potem velja

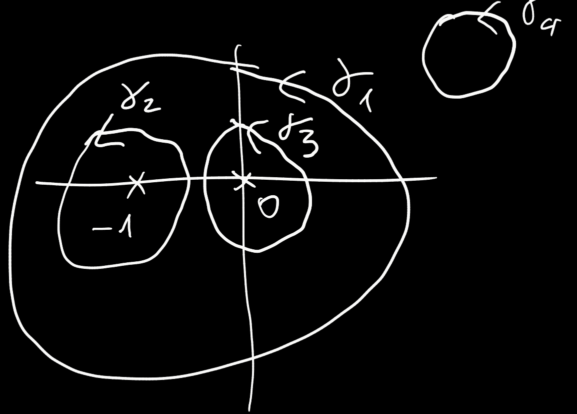
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_j)$$



Primer od prej: $f(z) = \frac{1}{z^2(1+z)}$

$a=0$: $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 + \dots \Rightarrow c_{-1} = \mathrm{Res}(f,0) = -1$

$a=-1$: $\frac{1}{z+1} + 2 + 3(z+1) + \dots \Rightarrow c_{-1} = \mathrm{Res}(f,-1) = 1$



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-1)\big) = 0$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-1) = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0) = -2\pi i \qquad \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0 \quad \text{(Cauchyjev izrek)}$$

KONEC

iskreno veliko stvari tule ne razumem. Škoda, da vas ni bilo na predavanjih. otroci, hodite na predavanja. nastavite si vsaj 2 budilki zjutraj!!1