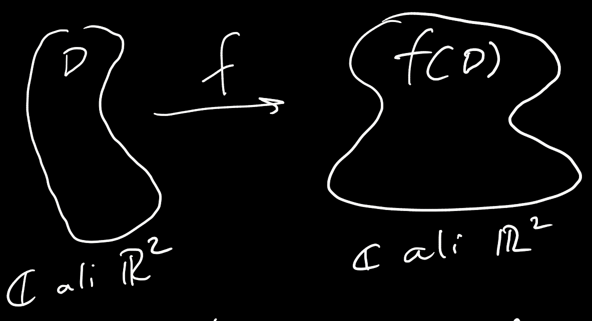
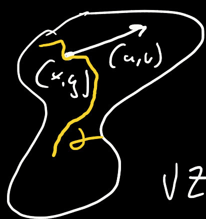
ANA3PFMF2024-12-17

[2 KRIVULJNI integral kompleksne funkcije]

zadnjič smo kompleksne fje $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ predstavili kot realne preslikave $f_\mathbb{R}: D_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



druga interpretacija pa je, da f predstavlja vektorsko polje. $f_\mathbb{R}: D_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oz. predpis, ki točki $(x,y) \in D_\mathbb{R}$ priredi vektor $(u(x,y), v(x,y))$



taka polja znamo integrirati vzdolž krivulje $\gamma \subset D$, le da tokrat to storimo na kompleksen način.

let $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{C}$ parametrizacija krivulje γ. potem definiramo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,dt$$

ključna razlika z integralom iz prejšnjega poglavja je, da · ne pomeni skalarnega produkta, temveč množenje kompleksnih števil

skalarni produkt $(x_1,y_1)(x_2,y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$

kompleksno množenje $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

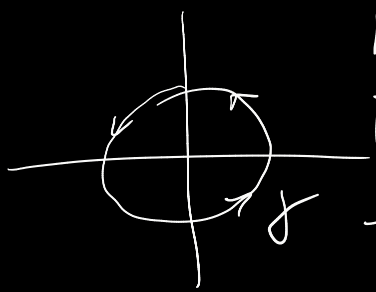
posledično, ker gre za kompleksne integrande, je rezultat kompleksno število. integral lahko razpišemo:

naj bo $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ in $\vec{r}(t) = r_1(t) + i r_2(t)$

tedaj $f(z)\cdot \dot{\vec{r}}(t) = \left(u(z)\,\dot r_1(t) - v(z)\,\dot r_2(t)\right) + i\left(u(z)\,\dot r_2(t) + v(z)\,\dot r_1(t)\right)$

in
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \left(u\dot{\vec{r}}_1 - v\dot{\vec{r}}_2\right)dt + i\int_a^b \left(u\dot{\vec{r}}_2 + v\dot{\vec{r}}_1\right)dt \in \mathbb{C}$$

Primer: integrirajmo $f(z) = z + \bar z$ po enotski krožnici, ki jo orientiramo pozitivno:



$\vec r(t) = \cos t + i\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$

$\dot{\vec r}(t) = -\sin t + i\cos t$

$f(\vec r(t)) = \cos t + i\sin t + \overline{\cos t + i\sin t} = 2\cos t$

$$\int_\gamma (z+\bar z)\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{2\cos}_{f(\vec r(t))} \cdot \underbrace{(-\sin t + i\cos t)}_{\dot{\vec r}(t)}\,dt = -2\int_0^{2\pi} \cos t \sin t + 2i\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt + 2i\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \underbrace{\cancel{-\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}}}_{0} + it\Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\cancel{\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}}}_{0} =$$

$= 2\pi i$

Dogovor: zaradi preglednosti se parametrizacija ne označuje več z $\vec r$, ampak se pri kompleksnih integralih uporablja kar $\gamma(t)$ ali $\rho(t)$, lahko pa se celo piše kar $z(t)$, t.j. črka z za kompl. spremenljivko in za parametrizacijo.

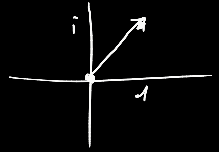
npr. $z(t) = \cos t + i\sin t$

$dz = \dot{z}(t)\,dt = (-\sin t + i\cos t)\,dt$

(dobimo isto stvar – kot da uvajamo novo spremenljivko v integral)

primer: $f(z) = z^2$ integriramo po daljici med 0 in $1+i$.

$z(t) = t + it,\ t \in [0,1]$



$dz = \dot{z}(t)\,dt = (1+i)\,dt$

$$\int_\gamma z^2\,dz = \int_0^1 \underbrace{(t+it)^2}_{z^2} \cdot \underbrace{(1+i)\,dt}_{dz} =$$

$$= \int_0^1 (\cancel{t^2} + 2it^2 + \cancel{i^2 t^2}) \cdot (1+i)\,dt = 2i(1+i)\int_0^1 t^2\,dt =$$

$$= 2i(1+i)\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2i}{3}(1+i)$$

lastnosti tega integrala so ekvivalentne kot pri običajnem krivuljnem integralu druge vrste:

1. $\int_\gamma f(z)\,dz$ je neodvisen od parametrizacije, medtem pa je odvisen od orientacije, t.j. $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz$

2. integral je kompleksno linearen, t.j.

$$\int_\gamma \alpha f(z)+\beta g(z)\,dz = \alpha\int_\gamma f(z)\,dz + \beta\int_\gamma g(z)\,dz \quad \text{za } \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

3. če ima presek dveh krivulj γ_1,γ_2 ničelno dolžino, je $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

[KOMPLEKSNI ODVOD IN HOLOMORFNOST]

po analogiji realne definicije želimo definirati kompleksni odvod kompleksne fje.

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ \in\mathbb{C}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

→ kvocient kompleksnih števil.

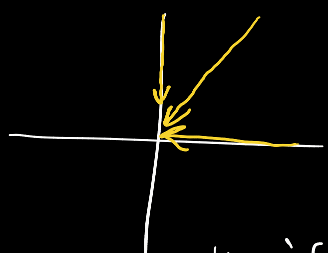
naravno vprašanje. recimo, da je $f=u+iv$ in u,v zvezno parcialno odvedljivi ffi. ali potem $\exists$ tudi $f'(z)$?

ne nujno. primer: let $f(z)=\bar z$. $f'(z)=\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{(z+h)}-\bar z}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\bar h}{h}$$

težava: h se lahko 0 bliža iz različnih smeri:

dobimo različne limite:



za $h=t\in\mathbb{R}$:
potem je $\lim_{h\to0}\frac{\bar h}{h} = \lim_{t\to0}\frac{t}{t}=1$

$\nRightarrow$ CRE, limita $\nexists$

za $h=it$, $t\in\mathbb{R}$:
potem je $\lim_{h\to0}\frac{\bar h}{h} = \lim_{t\to0}\frac{-it}{it}=-1$

vidimo, da ta limita ne more obstajati, saj je odvisna od smeri.

lepše se to vidi v polarnem zapisu.

$$h = |h| \cdot e^{i \arg h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| \cdot e^{-i \arg h}}{|h| \cdot e^{i \arg h}} = \lim_{h \to 0} e^{-2i \arg h}$$ rezultat je odvisen od tega približanja ⇒

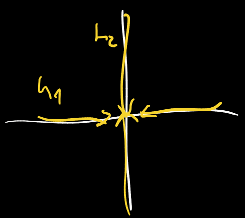
sklep: $f(z) = \bar{z}$ ni odvedljiva v kompleksnem, čeprav za njen realni analog $f_{\mathbb{R}}(x,y) = (x,-y)$ velja, da $u(x,y) = x$ in $v(x,y) = -y$ odvedljivi.

<u>Def.</u>: pravimo, da je $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna v $a \in D$ ali na D, če je kompleksno odvedljiva v $a \in D$ ali na D.

motivirani s prejšnjim primerom poiščimo potreben pogoj za holomorfnost v $z \in D$. zagotovo vemo, da mora veljati:

$$f'(z) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(z+ih_2) - f(z)}{h_2}.$$

ujemati se morata ti dve limiti vzdolž realne in imaginarne smeri $h = h_1 + ih_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$



let $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x+iy) + iv(x+iy)$

leva limita:

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x+h_1, y) + iv(x+h_1, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h_1} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x+h_1,y) - u(x,y)}{h_1} + i \frac{v(x+h_1,y) - v(x,y)}{h_1} = \underline{u_x(x,y)} + i\,\underline{v_x(x,y)}$$

parcialni odvodi u, v

desna limita:

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(z+ih_2) - f(z)}{ih_2} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{u(x,y+h_2) + i(x,y+h_2) - u(x,y) - iv(x,y)}{ih_2} =$$

$$= \lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{i} \left(\frac{u(x,y+h_2) - u(x,y)}{h_2} + \frac{v(x,y+h_2) - v(x,y)}{h_1} \right) =$$

$$= \frac{1}{i} \left(u_y(x,y) + i v_y(x,y) \right)$$

TOREJ DOBIMO kompletno enačbo

$$u_x + i v_x = \frac{1}{i} (u_y + i v_y)$$

$$i u_x - v_x = u_y + i v_y$$

realni del: $\boxed{-v_x = u_y}$

imaginarni del: $\boxed{u_x = v_y}$

potreben pogoj za holomorfnost

izkaže se, da je tudi zadosten pogoj za holomorfnost ☺

izrek: let $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksna fja, katere realni in imaginarni del (u in v) sta zvezno odvedljiva. potem je f holomorfna na D $\Leftrightarrow$ na tej množici zadošča $\underbrace{u_x = v_y \wedge u_y = -v_x.}_{\text{Cauchy-Riemannov sistem (CRS)}}$

Ne bomo dokazali.

Primer: $f(z) = z^2 \Rightarrow f(x,y) = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2ixy$

$\Rightarrow u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy$ ali zadošča CRS ?

CRS: $u_x = 2x = v_y$
$u_y = -2y = -v_x$ ✓ $\Rightarrow$ f holomorfna na $\mathbb{C}$.

Primer: $f(x,y) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$

$u = e^x \cos y \quad v = e^x \sin y$

$u_x = e^x \cos y = v_y \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$ ✓

Primer: $f(z) = \bar{z} \Rightarrow f(x,y) = x - iy \Rightarrow u = x, v = -y$

$u_x = 1 \neq v_y = -1$ ✗

Naravno vprašanje: katere f-je so holomorfne? neformalen odgovor: tiste, pri katerih v kompleksnem zapisu nastopa le z, ne pa tudi $\bar{z}$.

Je pa treba razumeti, da to pomeni tudi f-je, podane npr. s potenčnimi vrstami.

o tem kasneje.

naravno vprašanje: „kako odvajamo vpeljati ?"

formalni odgovor: na enak način kot v realnem, t.j. lahko uporabljamo ista pravila za produkt, vsoto, razliko, kompozitum, kvocient, morano pa biti v kategoriji holomorfnih ff. t.j. za f in g holomorfni $\Rightarrow (f+g)' = f' + g'$ in $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

Zgled: $f(z) = z^2$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z^2} + 2zh + h^2 - \cancel{z^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 2z + h = 2z$$

(za holomorfne ffe velja tudi L'Hôpitalovo pravilo.)

Cauchyjev izrek: let $D \subset \mathbb{C}$ enostavno povezana (brez lukenj) odprta množica in $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfna.

let $\gamma \subset D$ zvezno odvedljiva sklenjena krivulja.

potem velja, da je $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

γ je zvezno odvedljiva, če je taka njena parametrizacija.

Ideja dokaza: BSS predpostavimo, da γ nima samopresečišč in da je pozitivno orientiran rob neke odprte množice $\Omega \subset D$.

t.i. greenova formula za realne integrale druge vrste pove naslednje: krivuljni integral polja $\vec{F} = (P, Q)$

$$\int_{\text{rob } \Omega \to \partial \Omega} \underset{\text{vekt. polje}}{(P, Q)}\, ds = \iint_\Omega (Q_x - P_y)\, dx\, dy$$

običajen dvojni integral

mi imamo $f = u + iv$. let $z = z_1 + i z_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$

parametrizacija.

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_a^b (u+iv)(\dot z_1 + i\dot z_2)\,dt = \int_a^b (u\dot z_1 - v\dot z_2) + i(u\dot z_2 + v\dot z_1)\,dt =$$

$$= \int_a^b (u\dot z_1 - v\dot z_2)\,dt + i\int_a^b (u\dot z_2 + v\dot z_1)\,dt =$$

skal. prod   skal prod

$$= \underbrace{\int_a^b (u,-v)\cdot(\dot z_1,\dot z_2)\,dt}_{} + \underbrace{i\int_a^b (v,u)\cdot(\dot z_1,\dot z_2)\,dt}_{} =$$

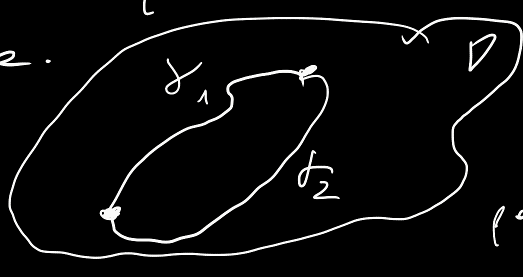
realna integrala

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} (u,-v)\,d\vec s}_{\text{krivuljni integral polja } \vec V = (u,-v)} + i\underbrace{\int_{\partial\Omega} (v,u)\,d\vec s}_{\vec U = (v,u)} \overset{\text{green}}{=} \iint_\Omega ((-v)_x - u_y)\,dx\,dy +$$

$$+ i\iint_\Omega (u_x - v_y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_\Omega \underbrace{(-v_x - u_y)}_{\overset{\|}{0}\ \text{CRS}}\,dx\,dy + i\iint_\Omega \underbrace{(u_x - v_y)}_{\overset{\|}{0}\ \text{CRS}}\,dx\,dy$$

Posledica izreka: integral holomorfne fje $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ za D brez lukenj je neodvisen od izbire poti γ ampak le od začetne in končne točke.



za $\gamma_1 \cup -\gamma_2 =: \gamma$ je to sklenjena pot in po Cauchyju $= 0$

tada $\int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz = 0$

D.N. Let $f(z) = z^2$. Kad bismo ga integrirali po krivulji $z = t + it$ za $t \in [0,1]$, trebali bismo dobiti isti rezultat za $z = t + it^2$, $t \in [0,1]$.