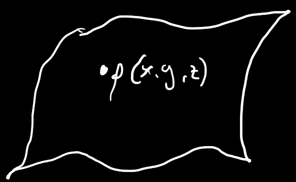
ANA3PFMF 2024-12-10

[4. DEFINICIJA ploskovnih integralov]

Definirali bomo ploskovna integrala skalarnega polja $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in vektorskega polja $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ po ploskvi $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Naj bo $\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija za Π.

$$I_3 = \iint_{\Pi} \rho \, dS = \iint_{D} \rho(\vec{r}(u,v)) \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv$$



integral prve vrste ponazarja maso ploskve Π. od kod pride izražava?

ocena za ploščino četverokotnega paralelograma na desni je

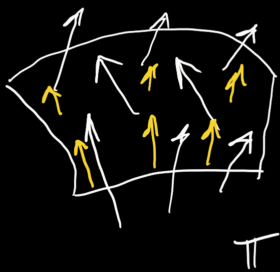
$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv = \sqrt{EG-F^2} \, du dv$$

ko računamo maso, moramo dodati še gostoto in če je delec (paralelogram) zelo majhen, lahko predpostavimo, da je gostota povsod na njem $\rho(\vec{r}(u,v))$ – da je homogeno telo.

$$dm \cong \rho(\vec{r}(u,v)) \cdot dS = \rho(\vec{r}(u,v)) \cdot \sqrt{EG-F^2} \, du dv$$

pri integralu druge vrste imamo dve izražavi:

$$I_4 = \iint_{\Pi} \vec{V} \, d\vec{S} = \iint_{\Pi} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \pm \iint_{D} [\vec{V}(\vec{r}(u,v)), \vec{r}_u, \vec{r}_v] \, du dv$$



nas zanima pretok polja $\vec{V}$ skozi ploskev Π. Specifično kolikšne so pravokotne projekcije polja na normale.

ZDB pri tem je smiselno, da merimo le doprinos polja v pravokotni smeri, t.j. integrirati moramo $\text{proj}_{\vec{n}} \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{n}$, kjer je $\vec{n}$ polje enotskih normal na Π.

S tem smo že razložili prvo izražavo, se pravi

$$\underbrace{\iint_\Pi \vec v\, d\vec S}_{} = \underbrace{\iint_\Pi \vec v\cdot\vec n \cdot dS}_{}$$

integral druge vrste -- integrira vektorsko polje

integral prve vrste -- integrira skalarno polje $\vec v\cdot\vec n$

Če gremo v konkretno parametrizacijo, pa vemo, da produkt $\vec r_u \times \vec r_v$ zavzame isto smer kot normala $\vec n$, ni pa nujno enako usmerjen in enotski -- njegova dolžina je $\sqrt{EG-F^2}$.

normala je $\pm \dfrac{\vec r_u\times\vec r_v}{|\vec r_u\times \vec r_v|} = \boxed{\pm}\dfrac{\vec r_u\times\vec r_v}{\sqrt{EG-F^2}}$

glede na to, ali $\vec r_u\times\vec r_v$ kaže v smer $\vec n$ ali ne.

To to vstavimo v prvo izražavo, dobimo

$$\iint_\Pi \vec v\cdot\vec n\, dS = \iint_\Pi \vec v\cdot\left(\pm\frac{\vec r_u\times\vec r_v}{|\vec r_u\times\vec r_v|}\right)dS \underset{\text{definicija } I_3}{=} \iint_D \vec v\cdot \pm\frac{\vec r_u\times\vec r_v}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

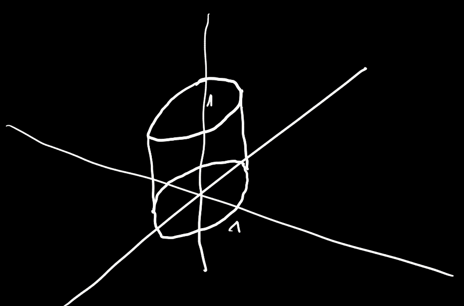
$$= \pm\iint_D [\vec v, \vec r_u, \vec r_v]\,du\,dv$$

to ustreza drugi izražavi.

$$I_3 = \iint_\Pi \rho\, dS = \iint_D \rho(\vec r(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$I_4 = \iint_\Pi \vec v\, d\vec S = \iint_\Pi \vec v\cdot\vec n\, dS = \pm\iint_D [\vec v, \vec r_u, \vec r_v]\,du\,dv$$

primer: integriramo polji $\rho = z$ in $\vec v = (x,0,0)$ po zunanji strani valja $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$.



naša ploskev je unija treh ploskev

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$$

Π_1, Π_2 sta spodnja oz. zgornja ploskev

Π_3 je plašč valja.

po lastnostih integralov, ki jih bomo navedli kasneje, velja $\iint_{T}\dots = \iint_{T_1}\dots + \iint_{T_2}\dots + \iint_{T_3}\dots$

začnimo pri plašču -- T_3, ki ga parametriziramo s preslikavo $\vec r(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [0,1]$

$$\vec r_u = (-\sin u, \cos u, 0) \qquad E = \vec r_u \cdot \vec r_u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1 \qquad \sqrt{EG-F^2} = 1$$
$$\vec r_v = (0, 0, 1) \qquad F = \vec r_u \cdot \vec r_v = 0$$
$$G = \vec r_v \cdot \vec r_v = 1$$

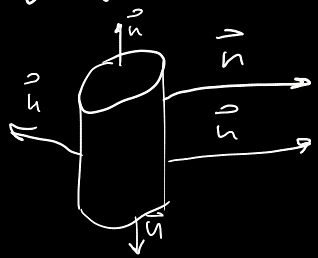
$$\iint_{T_3} z\,dS = \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} v \cdot \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^1 v\,dv = 2\pi \frac{v^2}{2}\Big|_0^1 = \pi$$

$p(\vec r(u,v))$

za integral $\vec v$ po T_3 potrebujemo

$$\vec r_u \times \vec r_v = (\cos u, \sin u, 0)$$
$$|\vec r_u \times \vec r_v| = 1$$

zanima nas, ali moramo izbrati $+$ ali $-$, t.j. ali $\vec r_u \times \vec r_v$ kaže v smeri $\vec n$. naša ploskev je zunanja stran:



v tem primeru je odgovor predznak $+$. torej integriramo $+[\vec v, \vec r_u, \vec r_v] = (\cos u, 0, 0) \cdot (\vec r_u \times \vec r_v) = \cos^2 u$

$$\Rightarrow \iint_{T_3} (x,0,0)\,d\vec S = +\iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \cos^2 u\,du\,dv = D.N. = \dots = \pi$$

tudi za ploskvi T_1 in T_2 bi lahko ubrali enako pot, t.j. prek parametrizacije:

$\vec r_1(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 0)$; $u \in [0,2\pi)$, $v \in [0,1]$

$\vec r_2(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 1)$; $u \in [0,2\pi)$, $v \in [0,1]$

naredi to za D.N.. mi pa skušajmo štiri preostale integrale izračunati brez parametrizacije

$z=0$

$\rho=0$

$\vec{n}_1=(0,0,-1)$

$\rightarrow (x,0,0)$

oba integrala sta 0.

$\iint_{\Pi_1} z\,dS = 0$, ker $z=0$ vzdolž Π_1

$\iint_{\Pi_1} (x,0,0)\,d\vec{S} = \iint_{\Pi_1} (x,0,0)\cdot(0,0,-1)\,dS = 0$,

ker sta $\vec{v}$ in $\vec{n}_1$ pravokotna vzdolž Π_1.

pri Π_2 je $\vec{n}_2=(0,0,1)$, zopet $\perp$ na $\vec{v}$. torej $\iint_{\Pi_2} (x,\rho,0)\,d\vec{S} = \iint_{\Pi_2} (x,0,0)(0,0,1)\,dS$

$= 0$

$\text{pov}(\Pi_2)$

in $\iint_{\Pi_2} z\,dS = \pi$, ker je homogeno.

$= \iint_{\Pi_2} dS$, ker $z=1$

$\longrightarrow$ lastnosti ploskovnih integralov

1. oba integrala sta neodvisna od izbire parametrizacije
2. oba integrala sta linearna t.j.

$$\iint_{\Pi} \alpha f_1 + \beta f_2\,dS = \alpha\iint_{\Pi} f_1\,dS + \beta\iint_{\Pi} f_2\,dS$$ za $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ in

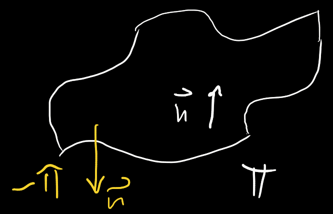
$$\iint_{\Pi} \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2\,d\vec{S} = \alpha\iint_{\Pi} \vec{v}_1\,d\vec{S} + \beta\iint_{\Pi} \vec{v}_2\,d\vec{S}$$

3. če je $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, velja, da je

$$\iint_{\Pi_1\cup\Pi_2} = \iint_{\Pi_1} + \iint_{\Pi_2}$$

isto velja, tudi če je $\Pi_1\cap\Pi_2$ množica točk z ničelno ploščino.

4. integral prve vrste je neodvisen od orientacije ploskve, integral druge vrste pa glede nanjo spreminja predznak.

za 

velja $\iint_{\Pi} \rho\, dS = \iint_{-\Pi} \rho\, dS$

in $\iint_{\Pi} \vec v\, d\vec S = -\iint_{-\Pi} \vec v\, d\vec S$

[INTEGRACIJA KOMPLEKSNIH fj]

V tem poglavju želimo integrirati kompleksne fje ene spremenljivke, t.j. predpise oblike $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Pri tem bodo $D\subset\mathbb{C}$ območja, t.j. odprte in povezane množice. Integrali pa bomo vzdolž krivulj $\gamma\subset D$, za katere bomo vedno predpostavili, da so njihove parametrizacije zadostikrat zvezno odvedljive.

[1. kompleksne fje kot realne preslikave]

vsako kompleksno število $z\in\mathbb{C}$ lahko zapišemo kot $z=x+iy$, kjer je $x=\mathrm{Re}(z)$, $y=\mathrm{Im}(z)$, $x,y\in\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$.

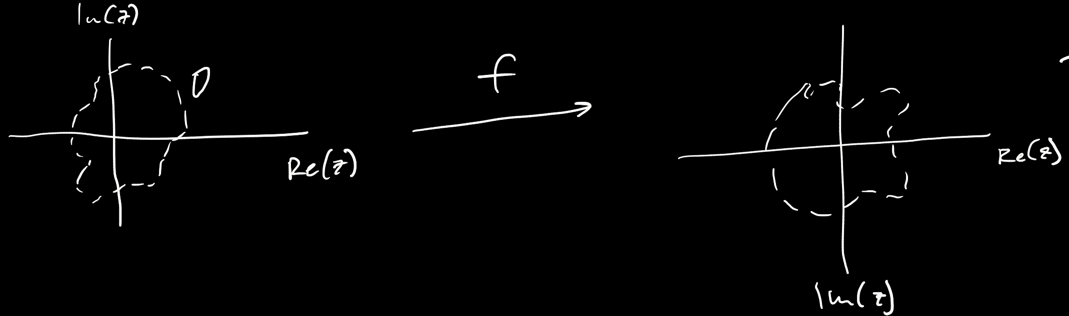
če imamo podan predpis $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, lahko tudi sliko razbijemo na realni in imaginarni del, t.j.:

$$f(z)=u(z)+i\cdot v(z),\quad \text{kjer } v,u: D\to\mathbb{R}.$$

$$f(x+iy)=u(x+iy)+i\cdot v(x+iy)$$

odtod sledi, da lahko vsako kompleksno fjo $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ identificiramo z realno preslikavo

$$f_{\mathbb{R}}: D_{\mathbb{R}}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$



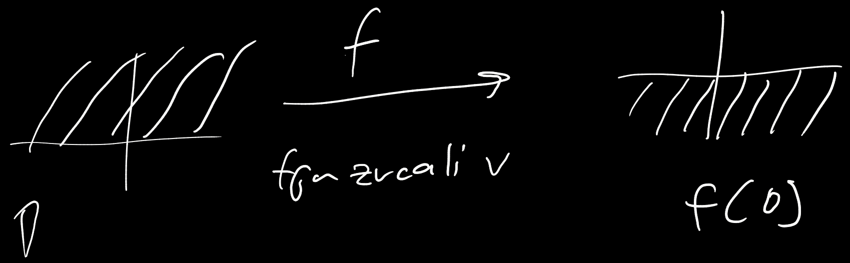
$f(D) = u(D) + iv(D)$

ta fja podaja preslikavo $f_{\mathbb{R}}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

primer: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
konjugacija $z \mapsto \bar{z}$
$x+iy \mapsto x-iy$

$f_{\mathbb{R}}(x,y) = (x,-y)$

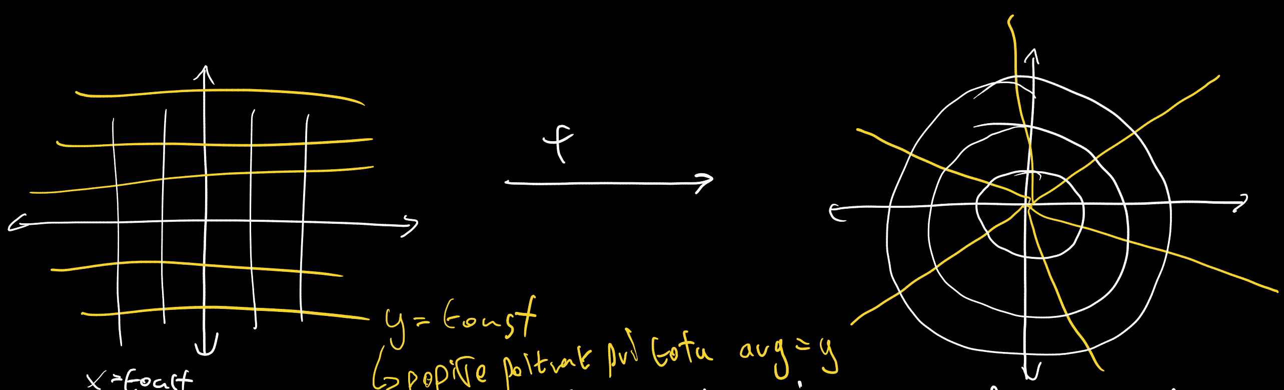
območje



primer: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = e^{z}$

$$f(x+iy) = e^{x+iy} \underset{\text{eulerjeva formula}}{=} e^{x}(\cos y + i\sin y) \iff$$

$$f_{\mathbb{R}}(x,y) = (e^{x}\cos y, e^{x}\sin y)$$



↳ se navije na krožnico in naredi ∞ krogov

vidimo: $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a f ni injektivna,

saj $f(z) = f(z + 2\pi i)$

legitimno vprašanje: Vsako kompleksno fjo $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je moč izraziti kot realno preslikavo $f_{\mathbb{R}}: D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
ali velja tudi obratno? ali lahko vsaki preslikavi $f_{\mathbb{R}}$ priredimo kompleksno fjo. odgovor je DA. uporabi se zvezi:

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{in}$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

primer: poiščimo kompleksno fjo, ki ustreza preslikavi

$$f_{\mathbb{R}}(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$$

Radi bi, da velja, da je $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$.
uporabimo zvezi:

$$f(z) = \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2 + i2\,\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) =$$

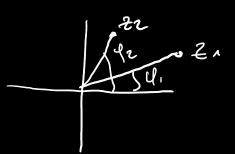
$$= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + i2\,\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} =$$

$$= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - \frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{\underbrace{4i^2}_{=-1}} + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2} =$$

$$= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2} = \ldots = z^2$$

Preizkus: $f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

če nas zanima, kako ta preslikava slika v geome3jskem smislu, se moramo spomniti polarnega zapisa:

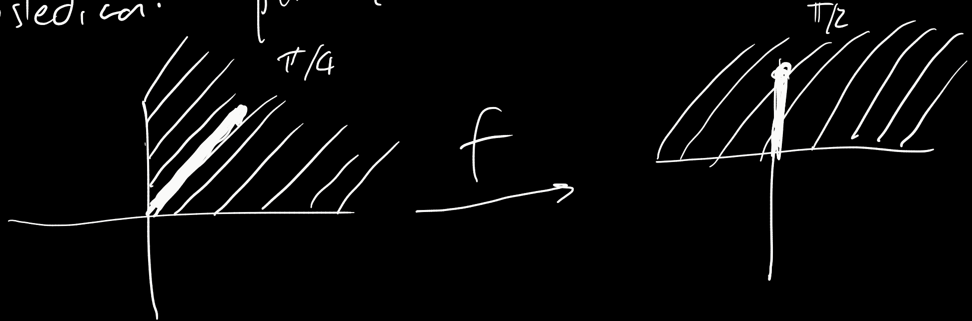


$$z_1 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_1|e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = |z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_2|e^{i\varphi_2}$$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ ~ pri množenju kompleksnih števil se absolutni vrednosti zmnožita, argumenta pa seštejeta.

posledica: pri $f(z)=z^2 \leftrightarrow f(z)=|z|^2 \cdot e^{2i\varphi}$



abs. vr. se kvadrirajo, argumenti se podvojijo.

morala je: kompleksne $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in realne preslikave $f_{\mathbb{R}}: D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so v bijektivni korespondenci.

posledica: f je zvezna v $a \in D$ ali na $D \subset \mathbb{C}$ natanko tedaj, ko je $f_{\mathbb{R}}$ zvezna v $(a_1, a_2) \in D_{\mathbb{R}}$ oz na $D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$.

t.j. teorija zveznosti se podeduje iz poglavja o preslikavah. Kasneje bomo videli, da pri odvodu ni tako.