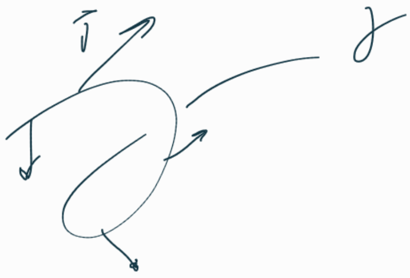
ANA3PF MF 2024-12-03

$I_1 = \int_\gamma \rho\, ds$ integral prve vrste reci maso

$I_2 = \int_\gamma \vec v\, d\vec s$ integral druge vrste reci delo



če je $\vec r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija γ, se I_1 in I_2 izrazita tako:

$$I_1 = \int_a^b \rho(\vec r(t))\, |\dot{\vec r}(t)|\, dt$$

$$I_2 = \int_a^b \vec v(\vec r(t)) \cdot \dot{\vec r}(t)\, dt$$

oba integrala obeh vrst lahko računamo tudi za krivulje v ravnini.

Zanimiv primer:

primerjajmo masno središče zgornje polovice enotske krožnice in zgornje polovice enotskega kroga. V obeh primerih naj bosta krivulja oz. lik homogena.

polovica kroga

BSS $\rho = 1$

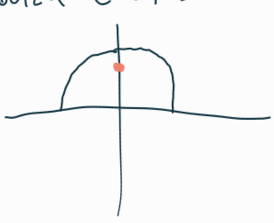
$$m = \iint_D \rho\, dx\,dy = \iint_D dx\,dy = S(D) = \frac{\pi}{2}$$

$\bar x = 0$ (simetrija)

$$\bar y = \frac{1}{m}\iint_D y\rho\, dx\,dy = \frac{2}{\pi}\iint_D y\, dx\,dy \overset{\text{polarne}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r\sin\varphi\, r\, dr =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^2\, dr = \frac{2}{\pi}\, 2\, \frac{1}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

polovica enotske krožnice



BSS $\rho = 1$

$$m = \int_\gamma \rho\, ds = \int_\gamma ds = l(\gamma) = \pi$$

$\bar x = 0$ zaradi simetrije

$$\bar y = \frac{1}{m}\int_\gamma y\rho\, ds = \frac{1}{\pi}\int_\gamma y\, ds$$

RABIMO PARAMETRIZACIJO te krivulje

$\vec r(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$

$|\dot{\vec r}(t)| = |(-\sin t, \cos t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$$\bar y = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sin t}_{y(\vec r(t))} \cdot \underbrace{1}_{|\dot{\vec r}(t)|}\, dt = \frac{2}{\pi}$$

Dobimo dve različni središči, saj gre enkrat za poln lik, drugič pa za prazno krivuljo / žico.

izračunajmo še $\int_\gamma \vec v\, d\vec s$ za $\vec v = (-y, x)$

parametrizacijo že imamo, zato kar uporabimo formulo

$$I_2 = \int_0^\pi \vec v(\vec r(t)) \cdot \dot{\vec r}(t)\, dt = \int_0^\pi (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt =$$

$= \int_0^\pi dt = \pi$

vprašanje: Ali se kateri od rezultatov, t.j. $\int_\gamma y\, ds$ in $\int_\gamma \vec v\, d\vec s$ spremeni, če krožnico parametriziramo v negativni smeri?

$$\vec r(t) = (-\cos t, \sin t),\quad t\in[0,\pi]$$

Intuicija pravi, da se prvi integral ne spremeni, saj bi moralo masno središče ostati enako, pri drugem pa bi se moral spremeniti predznak, ker gre za delo pri gibanju v nasprotno smer.

Preverimo, da obdrži dolžini: $\dot{\vec r}(t) = (\sin t, \cos t)$

$$|\dot{\vec r}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\gamma y\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cdot 1\, dt = \frac{2}{\pi} \quad \checkmark$$

$$\int_\gamma \vec v\, d\vec s = \int_0^\pi \vec v(\vec r(t))\cdot(\sin t,\cos t)\,dt = \int_0^\pi(-\sin t, -\cos t)\cdot(\sin t,\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi -\sin^2 t - \cos^2 t\, dt = -\int_0^\pi dt = -\pi$$

Lastnosti obeh vrst integralov.

① oba integrala sta neodvisna od izbire parametrizacije, predznak integrala druge vrste pa je odvisen od orientacije krivulje. t.j. $\int_\gamma p\,ds = \int_{-\gamma} p\,ds$

$$\int_\gamma \vec v\, d\vec s = -\int_{-\gamma}\vec v\,d\vec s$$

oba integrala sta linearna

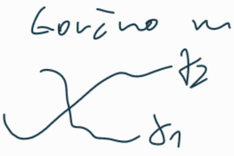
$$\int_\gamma(\alpha p_1 + \beta p_2)\,ds = \alpha\int_\gamma p_1\, ds + \beta\int_\gamma p_2\, ds,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\int_\gamma(\alpha\vec v_1+\beta\vec v_2)\,d\vec s = \alpha\int_\gamma \vec v_1\, d\vec s + \beta\int_\gamma \vec v_2\, d\vec s.$$

če je $\gamma_1\cap\gamma_2=\emptyset$, velja, da je $\int_{\gamma_1} p\,ds + \int_{\gamma_2} p\,ds = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} p\,ds$ in

$$\int_{\gamma_1}\vec v\, d\vec s + \int_{\gamma_2}\vec v\, d\vec s = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\vec v\, d\vec s.$$

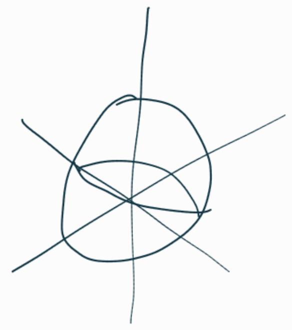
OPOMBA: ta sklep velja, tudi če je presek končno mnogo točk oz. če ima presek „ničelno dolžino“



[Ploskovni integrali]

Ploskve v prostoru

ploskev $\Pi\subset\mathbb{R}^3$ je 2D objekt v 3D prostoru. Kot krivulje jo lahko podamo na 3 načine, kar ilustriramo na primeru enotske sfere.



implicitno $x^2+y^2+z^2=1$

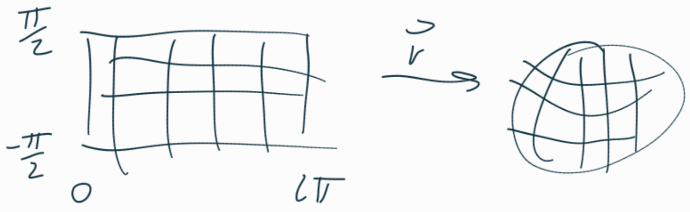
eksplicitno $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

vsaka polobla je graf f-je dveh spremenljivk. Definicijsko območje za $z(x,y)$ je krog $x^2+y^2\leq 1$

parametrično uporabimo sferne koordinate za $u=\varphi$, $v=\theta$, $R=1$ dobimo

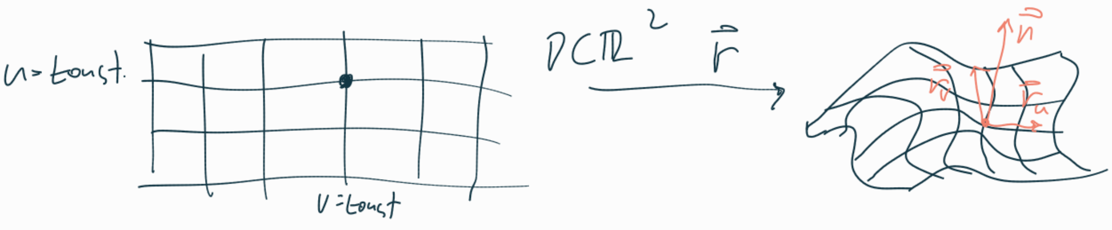
$$\vec{r}:[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(u,v)=(\cos u\cos v,\sin u\cos v,\sin v)$$



Za analizo na ploskvah je najbolj primerna parametrična oblika, zato jo raziščimo še malce podrobneje.

Preslikavi $\vec{r}: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ pravimo parametrizacija ploskve Π, če velja $\vec{r}(D)=\Pi$ in da je $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ v vsaki točki $(u,v)\in D$.



Pogoj $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ pove, da $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ nista nikoli vzporedna, zato lahko definiramo normalo v vsaki točki ploskve Π:

$$\vec{n}=\pm\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$$

Znak $\pm$ dodamo, ker ni nujno, da se orientacija ploskve (usmerjenost $\vec{n}$) ujema z orientacijo oz. usmerjenostjo produkta $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ (ujemanje je, ali ko zamenja zgornja ali spodnja stran ploskve).

zgled: enotska sfera:

$$\vec r(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v), \quad u\in[0,2\pi],\ v\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\vec r_u = (-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0)$$ odvod

$$\vec r_v = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v)$$

$$\vec r_u\times\vec r_v = (\cos u\cos^2 v, \sin u\cos^2 v, \sin^2 u\sin v\cos v + \cos^2 u\sin v\cos v)$$

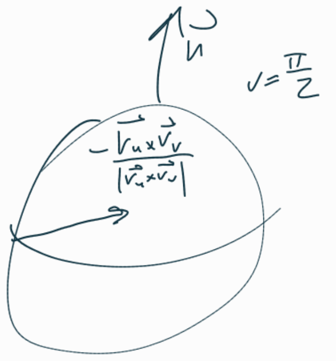
$$= \cos v(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$$

$$|\vec r_u\times\vec r_v| = \cos v\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 v} = \cos v\sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} =$$

$$= \cos v$$

$$\frac{\vec r_u\times\vec r_v}{|\vec r_u\times\vec r_v|} = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$$

katero od dveh možnih normal podaja ta vektor?



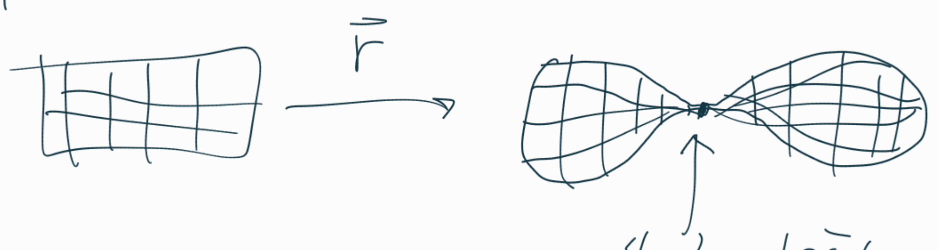
za $v=\frac{\pi}{2}$ dobimo vektor $(0,0,1)$

tj. produkt ustreza normali „zunanje strani sfere"

$-(\vec r_u\times\vec r_v)$ pa kaže v smer normale „notranje strani"

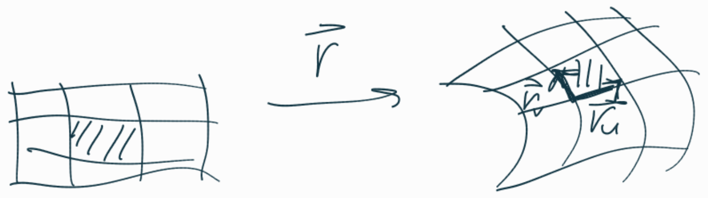
komentar:

- v tem poglavju privzamemo, da so naše ploskve orientabilne, če pravi lahko jim priredimo orientacijo (ne moreš na zvezen način priti iz ene na drugo stran ploskve kot pri npr. möbiusovem traku)
- kako izgleda ploskev, kjer je $\vec r_u\times\vec r_v = \vec 0$ na neki podmnožici D?



slabe točke – tu nimamo dveh dimenzij

s pomočjo parametrizacije lahko izračunamo površino ploskve. osnovna ideja:



linearen približek za površino malega krivočrtnega kosa je $dS \approx \underbrace{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}_{\text{ploščina paralelograma, napetega na } \vec{r}_u \text{ in } \vec{r}_v} \cdot du\,dv$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\cdot(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)} \overset{LA}{=} \sqrt{(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u)\cdot(\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v)-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2} = \sqrt{EG-F^2},$$

kjer so $E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u$, $F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$ in $G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$ koeficienti t.i. PRVE FUNDAMENTALNE FORME.

Ti koeficienti so odvisni od izbrane parametrizacije ploskve, z njimi pa se površina Π izrazi kot

$$\text{Pov}(\Pi) = \underbrace{\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv}_{\text{dvojni integral po } D\subset\mathbb{R}^2 \text{ fje } \sqrt{EG-F^2}}$$

ZGLED: SFERA

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \sin^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 v = E$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0 = F$$

$$\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v = \sin^2 v + \cos^2 v = 1 = G$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\cos^2 v \cdot 1 - 0} = \cos v$$

→ pozitivno za $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ta rezultat je smiseln, saj po izpeljavi velja: $\sqrt{EG-F^2} = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \cos v$, kar smo izračunali že prej.

površina sfere:

$$\text{Pov}(\Pi) = \underbrace{\int_0^{2\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{D=[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \underbrace{\cos v}_{\sqrt{EG-F^2}}\, dv = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, dv = 2\pi \sin v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$