ANA3P FMF 2024-11-18

4. uporaba večkratnih integralov.

a.) ploščina/volumen

če ima rob ∂D lika $D \subset \mathbb{R}^2$ ploščino enako 0, vemo, da je $S(D) = \iint_D dx\,dy$. podobno za telo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, katerega rob ima volumen enak 0 dobimo $Vol(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$. to idejo lahko posplošimo tudi za omejene množice v $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

b.) masa

če predpostavimo, da ima lik oz. telo v vsaki točki gostoto ρ, lahko izračunamo tudi njegovo maso. $m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$ za $D \subset \mathbb{R}^2$

$$m(\Omega) = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

za $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

c.) masno središče

osnovna ideja: če imamo masi m_1 in m_2 v točkah (x_1, y_1) in (x_2, y_2), bosta koordinati njunega masnega središča naslednji:

$m_2 > m_1$

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

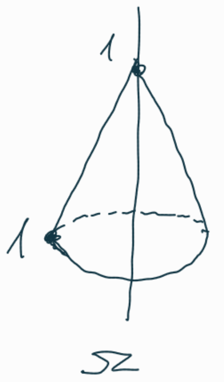
sedaj to idejo prenesemo na veliko množico točk v ravnini/na omejen lik $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \rho(x,y)\,dx\,dy$$

Če bi imeli $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, z analognim računom dobimo koordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Zgled: homogen stožec



$0 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2-y^2}$

radi bi določili njegovo masno središče, ob predpostavki, da je $\rho(x,y,z)=c$ (konstanta)

BSŠ $\rho(x,y,z)=1$

$$m(\Omega)=\iiint_{\Omega} 1 \, dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{\pi}{3}$$

zaradi simetrije sklepamo, da je $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{m(\Omega)}\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{m(\Omega)}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} z \; dz\,dr\,d\varphi =$$

cilindrične
$x=r\cos\varphi$
$y=r\sin\varphi$
$z=z$
$\det J=r$

$$= \frac{3}{\pi} 2\pi \int_0^1 \frac{rz^2}{2}\Big|_0^{1-r} dr = 3\int_0^1 r(1-r)^2\,dr =$$

$$= 3\int_0^1 r-2r^2+r^3\,dr = 3\left(\frac{r^2}{2}-\frac{2r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{6-8+3}{12}\right) = \frac{1}{4}$$

masno središče: $(0,0,\frac{1}{4})$

Komentar: na analogen način lahko iščemo tudi masna središča množic v $\mathbb{R}^n; n>3$.

d.) vztrajnostni moment

v fiziki je vztrajnostni moment količina, ki opisuje upor pri vrtenju.

$J=mr^2$

če je želimo izračunati za l.z. $D\subset\mathbb{R}^2$ pri vrtenju okoli izhodišča ali za telo $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ pri vrtenju okoli osi z, to storimo z integralom:

$$J(D)=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$J(\Omega) = \iint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

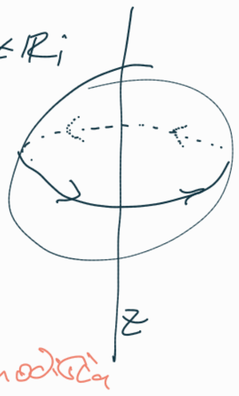
obakrat integriramo kvadrat polarnega radija.

Zgled: homogena enotska sfera okoli osi svoje simetrije (z)

$$J(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R};\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$

$\rho(x,y,z)=1$



$$\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 dr\,d\theta\,d\varphi$$

sferične

$x = R\cos\varphi\cos\theta$ — sferni kot

$y = R\sin\varphi\cos\theta$ — razdalja od izhodišča

$z = R\sin\theta$

$\det J = R^2\cos\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \underbrace{\left(R^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\right)}_{R^2\cos^2\theta} R^2\cos\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi =$$

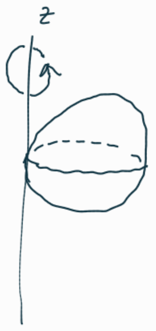
soda

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 R^4\cos^3\theta\,dR\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta\cdot\int_0^1 R^4\,dR =$$

$$= 2\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta\cdot\frac{R^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},2\right) = \frac{4\pi}{15}$$

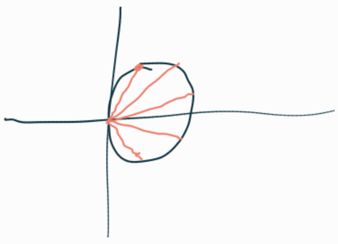
$2q-1=3$

Kako se rezultat spremeni, če premaknemo os vrtenja, npr.



$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (x-1)^2+y^2+z^2\le 1\}$

$\rho(x,y,z)=1$



$$J(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$x^2+y^2+z^2=2x$

$R^2 = 2R\cos\varphi\cos\theta$

$R = 2\cos\varphi\cos\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\varphi\cos\theta} R^2\cos^2\theta\,R^2\cos\theta\,dR =$$

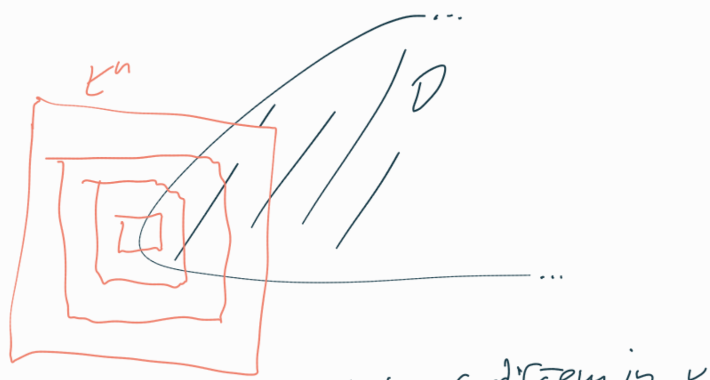
$$= \ldots \text{DN} \ldots = \boxed{\frac{28\pi}{15}}$$

večji rezultat je smiseln: točke so v povprečju dlje od osi.

[Posplošeni večkratni integral:]

Doslej smo obravnavali le integrale omejenih fj na omejenih območjih v $\mathbb{R}^n$. Sedaj želimo ta koncept razširiti tudi na neomejene fje in območja. Teorijo razvijemo le za $n=2$, analogni sklepi pa veljajo tudi za $n\geq 3$.

(1) integral po neomejenem liku $D\subset\mathbb{R}^2$.



potrebno izčrpanje $\mathbb{R}^2$ z zaprtimi in omejenimi množicami, ki imajo lastnost $K_{n+1}\supset K_n$

in $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n=\mathbb{R}^2$

npr: $K_n=[-n,n]\times[-n,n]$ ali pa $K_n=D(0,n)$

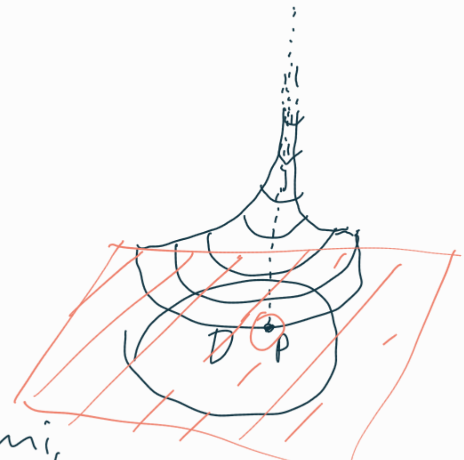
dist s središčem v 0 in radijem n

$$\iint_D f\,dx\,dy := \lim_{n\to\infty}\iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy$$

Ker je K_n omejena, je tudi $D\cap K_n$ in je integral v limiti „običajen" oz. definiran $\forall n\in\mathbb{N}$.

(2) integral neomejene fje

Naj f neomejena v $p\in\mathbb{R}^2$



znova poiščemo kompaktno izčrpanje z zaprtimi množicami, ki imajo lastnost $K_{n+1}\supset K_n$ in $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n=\mathbb{R}^2\setminus\{p\}$

npr. $K_n=\mathbb{R}^2\setminus D(p,\frac{1}{n})$ ZDB v ravnini odstranimo disk radija $\frac{1}{n}$ okoli p.

$$\iint_D f\,dx\,dy := \lim_{n\to\infty}\iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy.$$

Ker $D\cap K_n$ ne vsebuje p, je vsak integral v limiti „običajen", t.j. f je tam omejena.

Komentar: Često se posplošenemu integralu reče tudi izlimitirani integral, ker je še bolj sugestivno ime. 😏

V (1) in (2) sta predstavljena osnovna tipa posplošenih integralov. Lahko imamo tudi več singularnosti hkrati.

Izkaže se, da je pomemben predznak fje f, zato bomo obravnavali dva primera konvergence.

{posplošeni integrali pozitivnih f.}

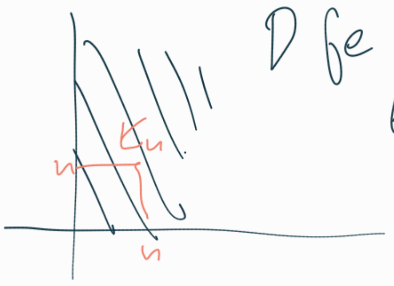
Če je $f \geq 0$, je zaporedje $\left(\iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče tako v (1) kot tudi v (2).

Tedaj se lahko zgodi le dvoje:

- zaporedje nima limite oz. gre proti ∞, takrat rečemo, da $\iint_D f\,dx\,dy$ divergira (narašča preko vseh mej). ali pa
- zaporedje je omejeno $\Rightarrow$ konvergentno, njegova limita pa poda vrednost $\iint_D f\,dx\,dy$.

  Še več: limita je celo neodvisna od izbire K_n (izčrpanja). Res, če sta npr. K_n in $\tilde{K}_m$ dve izčrpanji, vedno velja, da je $K_n \subset \tilde{K}_{\tilde{m}}$ in $\tilde{K}_m \subset K_{\tilde{n}}$ za ustrezne $n, m, \tilde{n}, \tilde{m}$. $\Rightarrow$ limita je enaka.

Primer: $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ na območju $[0,\infty)\times[0,\infty)=D$



D je celoten I. kvadrant

$K_n := [0,n]\times[0,n]$ za $n\in\mathbb{N}$

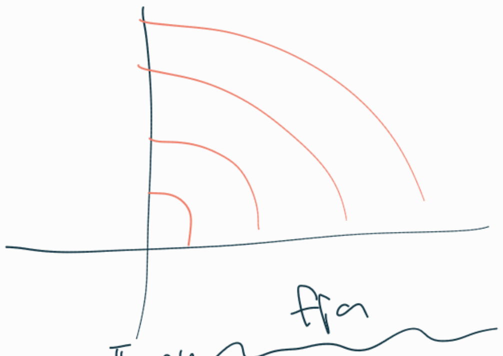
$$\iint_D f\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^n\int_0^n e^{-(x+y)}\,dx\,dy =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^n dx\int_0^n e^{-(x+y)}\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^n -e^{-(x+y)}\Big|_{y=0}^{y=n}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int e^{-x}-e^{-(x+n)}\,dx =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-e^{-x}+e^{-(x+n)}\right)\Big|_0^n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{-e^{-n}}_{0}+1+\underbrace{e^{-2n}}_{0}\underbrace{-e^{-n}}_{0} = 1$$

KAJ ČE BI VZELI DRUGAČNO IZČRPANJE?

$$K_n = \{(x,y);\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq n^2\}$$



$$\iint_D f\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy =$$

polarne
$x = r\sin\varphi$
$y = r\cos\varphi$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^n \underbrace{e^{-(r\cos\varphi + r\sin\varphi)}}_{f(r,\varphi)} \cdot \underbrace{r}_{\text{jacobi}}\,dr\,d\varphi = \dots = 1$$

opazimo, da bi enak rezultat lahko dobili tudi s tim posplošenim Fubinijevim izrekom.

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-(x+y)}\,dx\,dy \overset{\text{fubini}}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,dx\,dy = \int_0^\infty -e^{-(x+y)}\Big|_{y=0}^{y=\infty} dx =$$

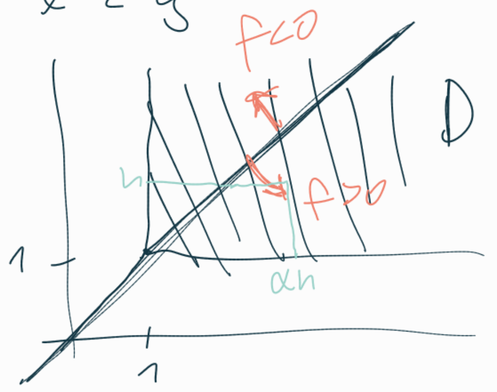
$$= \int_0^\infty \underbrace{\cancel{e^{-\infty}}}_{\to 0} + e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = \underbrace{\cancel{-e^{-\infty}}}_{\to 0} + 1 = 1$$

To dejstvo bomo kot izrek zapisali malo kasneje, ko preučimo še f-je, pri katerih zaloga vrednosti vključuje tako pozitivna kot negativna števila.

[posplošeni integral funkcij obeh predznakov]

če je $f\geq 0$ in $f<0$ v točkah D, se nam pojavijo težave, ki so podobne tistim pri konvergenci vrst s pozitivnimi in negativnimi členi. Za ilustracijo si oglejmo naslednji primer. $I = \iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$,

vidimo, da je integrand strogo pozitiven za $x^2>y^2$ in negativen za $x^2<y^2$.



$K_n = [0,\alpha n]\times[0,n]$, $\alpha>0$

pokazali bomo, da je limita odvisna od α

namig: $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy = \int_1^{\alpha n} dx \int_1^n \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \underset{\text{vaja}}{\overset{?}{=}} \int_1^{\alpha n} \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=1}^{y=n} =$$

$$= \int_1^{\alpha n} \left(\frac{n}{x^2+n^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \operatorname{atan}\frac{x}{n} - \operatorname{atan} x \Big|_1^{\alpha n} =$$

$$\frac{n}{x^2+n^2} = \frac{1}{n^2}\frac{n}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$t = \frac{x}{n} \qquad dt = \frac{1}{n}dx$$

$$= \operatorname{atan}\alpha - \underbrace{\operatorname{atan}\frac{1}{n}}_{\text{v limiti } \to 0} - \underbrace{\operatorname{atan}\alpha n}_{\text{v limiti } \to \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{atan}1}_{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \operatorname{atan}\alpha - \frac{\pi}{4}$$

ups, odvisnost od α, za $\alpha > 1$ dobimo pozitiven, za $\alpha < 1$ pa negativnega, kar je tudi, glede na predznak f-je, smiselno.

sklep: ta limita/pripadajoči integral nista konvergentna.

v tem primeru tudi posplošitve fubinijevega izreka ni.

$$\text{naivno: } \iint_{(1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \overset{\text{„fubini"}}{=} \int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \overset{\text{vaja}}{=}$$

$$= \int_1^\infty \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_1^\infty dx = \int_0^\infty \underbrace{\lim_{y\to\infty}\frac{y}{x^2+y^2}}_{\to 0} - \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\operatorname{atan} x\Big|_1^\infty =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

če pa zamenjamo vrstni red integracije/vlogo x in y, pa zaradi asimetrije $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, dobimo rezultat $\frac{\pi}{4}$.

Pomni: če fja ni zgolj pozitivna, je lahko prisoten tudi tip divergence, v kateri je limita sicer končna, a ni neodvisna od izčrpanja.

Da se izognemo tovrstnim težavam, upeljemo dve novi vrsti konvergence. Pravimo, da je $\iint_D f\,dxdy$ <u>absolutno konvergenten</u> $\Leftrightarrow$ konvergira tudi $\iint_D |f|dxdy$. V primeru, da $\iint_D f dxdy$ konvergira zgolj na običajen način in ni absolutno konvergenten, pravimo, da je <u>pogojno konvergenten</u>.

V našem primeru je $\iint_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} dxdy$ pogojno in absolutno divergenten.

Smiselnost teh definicij utemelji standardna trditev: če je $\iint_D f\,dxdy$ absolutno konvergenten, tudi $\iint_D f dxdy$ konvergira na običajen način.

Končni sklep je, da lahko za absolutno konvergentne posplošene integrale uporabimo Fubinijev izrek.

Izrek: če $\exists \iint_{\mathbb{R}^2} |f| dxdy$ ali $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f|\,dy$ ali $\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f|\,dx$,

potem $\exists$ tudi naslednji integrali:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx$$

analog velja za ostala neomejena območja in neomejene fje.

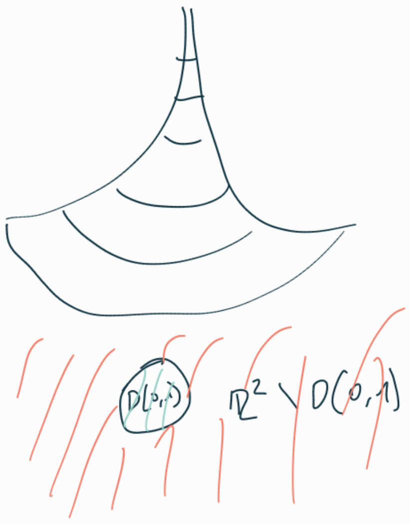
Za konec skušajmo dobiti nekaj občutka, kdaj ti integrali konvergirajo.

Spomnimo: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p>1$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p<1$

Analog tega primera v $\mathbb{R}^2$ bi bila fja

$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^p}$ na območju $\underset{\text{enotski disk}}{\underline{D(0,1)}}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D(0,1)$.



uporabimo polarne koordinate.

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D(0,1)} f\,dx\,dy \overset{\text{polar}}{=} \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{r^p} \cdot r\,dr =$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{p-1}}\,dr \quad \exists \Leftrightarrow p-1>1 \Leftrightarrow p>2$$

Podobno dobimo: $\iint_{D(0,1)} f\,dx\,dy = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{p-1}}$ $\exists$ za $p-1<1$, $p<2$

$\Longrightarrow$ v $\mathbb{R}^2$ integral v neskončnosti $\exists$, če gre več kot zgolj kvadratično proti 0, v polih pa so dopuščeni poli stopnje $p<2$.

V $\mathbb{R}^3$ bi bil analog tega primera fja $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^p$

ki je gledano na $\underset{\text{enotska krogla}}{K(0,1)}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus K(0,1)$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus K(0,1)} f\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\infty} \frac{1}{R^p} R^2 \cos\theta\,dR =$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta}_{=2} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dR}{R^{p-2}} \quad \exists \text{ za } p-2>1 \Leftrightarrow p>3$$

podobno $\iiint_{K(0,1)} f\,dx\,dy\,dz$ $\exists$ za $p<3$

v splošnem je meja za obstoj integrala v $\mathbb{R}^n$ pri $p=n$ t.j. za obstoj v ∞ potrebujemo

$p > n$, za $\exists$ v polju pa $p < n$.