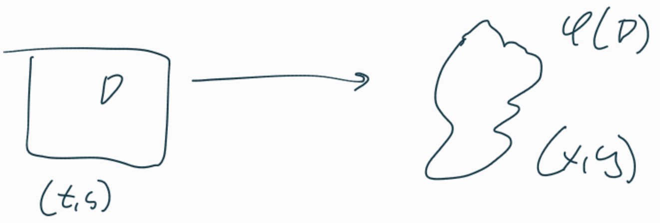
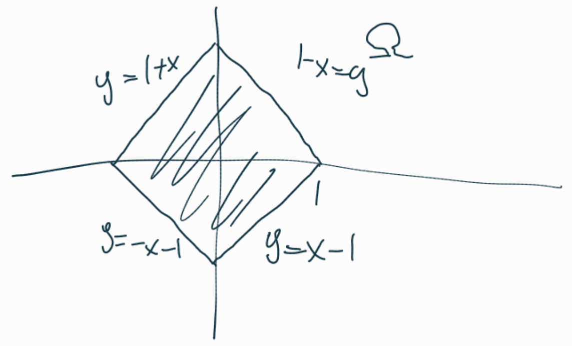
ANA3P FMF 2024-11-12 zamudil 10 minut, 9:15 p.01

SPOMNIMO:



$$\iint_{f(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x(t),y(t))\,|\det J_\varphi(t,s)|\,dtds$$

Primer: $f(x,y) = x+y$



vpeljimo koordinate

$$t = x+y$$
$$s = x-y$$

ta preslikava je bijektivna

$$2x = t+s \longrightarrow x = \frac{t+s}{2}$$
$$2y = t-s \longrightarrow y = \frac{t-s}{2}$$

zanima nas, kaj je praslika Ω s to preslikavo/transformacijo.

ROB Ω ROB PRASLIKE

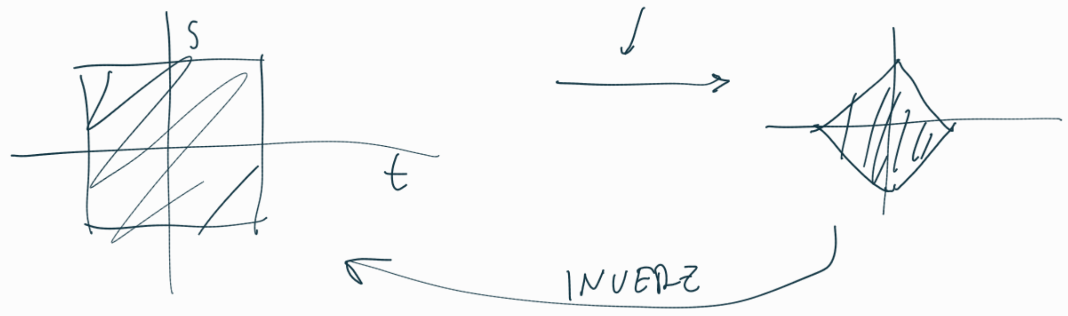
$y=1-x \longrightarrow x+y=1 \longrightarrow t=1$

$y=x-1 \longrightarrow y-x=-1 \longrightarrow -s=-1 \longrightarrow s=1$

$y=-x-1 \longrightarrow x+y=-1 \longrightarrow t=-1$

$y=x+1 \longrightarrow y-x=1 \longrightarrow -s=1 \longrightarrow s=-1$

$$\varphi(t,s) = \left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right)$$



$$\varphi^{-1}(x,y) = (x+y, x-y)$$

Torej je v tem primeru $D = [-1,1]\times[-1,1]$ in $\varphi(D) = \Omega$.

Izrazimo še f in $\det J_\varphi$.

$$f(x,y) = x+y = t$$

$$\det J_\varphi(t,s) = \begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Po IZREKU VELJA:

$$\iint_{\Omega = \varphi([-1,1]\times[-1,1])} (x+y)\,dxdy = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} \underbrace{t}_{f\circ\varphi} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{|\det J_\varphi|}\,dtds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} ds \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 \quad \checkmark$$

[tri- in večterni integral]

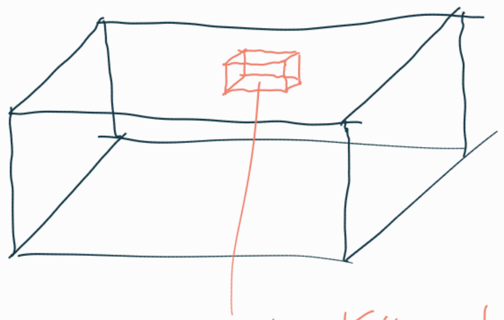
v tem razdelku bomo preleteli definicije in rezultate za določene integrale omejenih funkcij z $n \geq 3$ spremenljivkami.

Def.: Naj $f: \underbrace{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]}_{\text{kvader v } \mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}$ omejena.

izberemo delitev D, ki je podana z
$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$
$$a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_s = b_3$$

podobno kot prej definiramo $K_{ijk} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$.

$V_{ijk} :=$ Volumen (K_{ijk}).



Kvader K_{ijk} volumna V_{ijk}.

Naj M_{ijk} in m_{ijk} sta sup in inf od f na K_{ijk}.

Definiramo vsote:

$$s(f,D) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,s} m_{ijk} V_{ijk} \qquad S(f,D) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,s} M_{ijk} V_{ijk}$$

$$R(f,d,T) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,s} f(t_i, s_j, u_k) \cdot V_{ijk}$$

↳ testna točka $\in K_{ijk}$.

Definicija integrabilnosti:

$$\inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D) = \lim_{\substack{\max\{x_i - x_{i-1}\} \to 0 \\ \max\{y_i - y_{i-1}\} \to 0 \\ \max\{z_i - z_{i-1}\} \to 0}} R(f,D,T) =: I$$

Kadar I $\exists$, mu pravimo „trojni integral po območju"

in označimo:

$$\iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz := I$$

vidimo da v primeru $n=3$ spremenljivk še imamo geometrijsko sliko območja integracije, nimamo pa več grafa funkcije oz. ilustracije approx. z Riemann. vsotami, saj bi za to potrebovali predstavo štirih prostorskih dimenzij.

če se premaknemo v primer $n > 3$ spremenljiv, izgubimo tudi geometrijsko predstavo o območju integracije, Vseeno pa lahko navedimo definicijo integrala na enak način, t.j. z delitvami n-kvadra $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$

V tem primeru vzamemo $K_{i_1,i_2,\dots,i_n} = [x^1_{i_1-1}, x^1_{i_1}]\times\cdots\times[x^n_{i_n-1}, x^n_{i_n}]$, volumen$(K_{i_1,\dots,i_n})$ pa je produkt stranic teh intervalov.

$x^j_{i_j}$ so delilne točke.

Katere f-je so integrabilne? Izkaže se, da vse tiste, ki so zvezne povsod, razen morda v končno mnogo n-1 dimenzionalnih množicah nezveznosti. Primer:

- $n=1$: končno nezveznih točk
- $n=2$: končno nezveznih krivulj
- $n=3$: končno nezveznih ploskev
- $n=4$: končno nezveznih 3D prostorov.

...

t.j. množica nezveznosti mora imeti n-volumen enak 0.

[FUBINIJEV IZREK]

Za $n=3$ potrebujemo integrabilnost $f(x,y,z)$

$x\mapsto f(x,y,z)$, $y\mapsto f(x,y,z)$, $z\mapsto f(x,y,z)$ na ustreznih

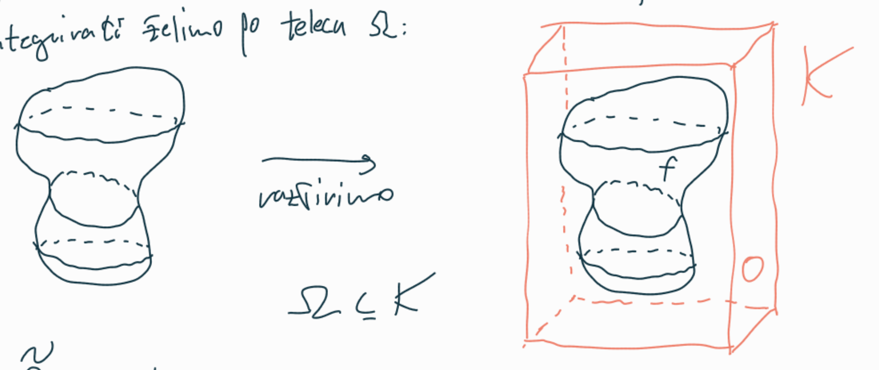
območjih oz. intervalih. Potem velja

$$\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}_{\text{za } n=3 \text{ imamo 6 možnih vrstnih redov, za } n>3 \text{ pa } n!}$$

Če naše območje integracije ni kvader, postopamo na enak način kot pri $n=2$; t.j. razširimo f z ničelno f-jo do n-kvadra

integrirati želimo po telesu Ω:

$n=3$:

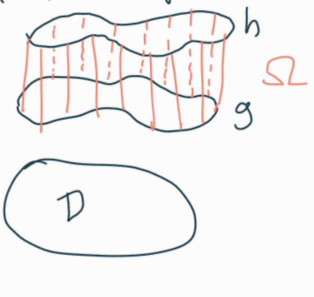


$\Omega\subseteq K$

$$\iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz = \iiint_K \tilde f\,dx\,dy\,dz \qquad \tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & ; x\in\Omega \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Enaka ideja brez geom. predstave tudi za $n>3$.

Posplošen Fubinijev izrek za $n=3$.

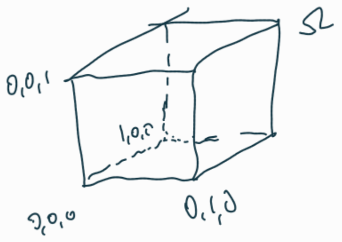


$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (x,y)\in D \wedge g(x,y)\le z\le h(x,y)\}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\ dx\,dy$$

V praksi vedno razrežemo integracijsko območje na tovrstne kose.

PRIMER: $f(x,y,z)=x$ integrirajmo po kocki in pravokotni piramidi z oglišči $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.



$$\iiint_{\Omega=[0,1]^3} x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xz\Big|_0^1 dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 x\,dy\,dx = \int_0^1 xy\Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Še hitreje gre, če razcepimo / izpostavimo konstante:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 dy \cdot \int_0^1 dz = \int_0^1 x\,dx \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

To se da, ker se spremenljivke, po katerih integriramo, ne pojavijo v mejah.

Piramida:

To telo ima za projekcijo na ravnino 3kotnik z oglišči $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, ki ga označimo z D:

Za vsak $(x,y)\in D$ je z nato ujet med ravnino $z=0$ in ravnino skozi točke $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Enačba te ravnine je $x+y+z=1$.

Torej lahko piramido Ω opišemo kot

$$\Omega = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3;\ (x,y)\in D,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

Po posplošenem Fubiniju imamo:

$$\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz = \iint_D\left(\int_0^{1-x-y} x\,dz\right)dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx =$$

↳ dvojni integral znamo izračunati iz prejšnjega poglavja.

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} xz\Big|_0^{1-x-y} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xy - x^2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\, dx = \text{P.N.}$$

ANALOG $n \geq 3$ IN PRAVOKOTNO PIRAMIDO BI BILO OBMOČJE:

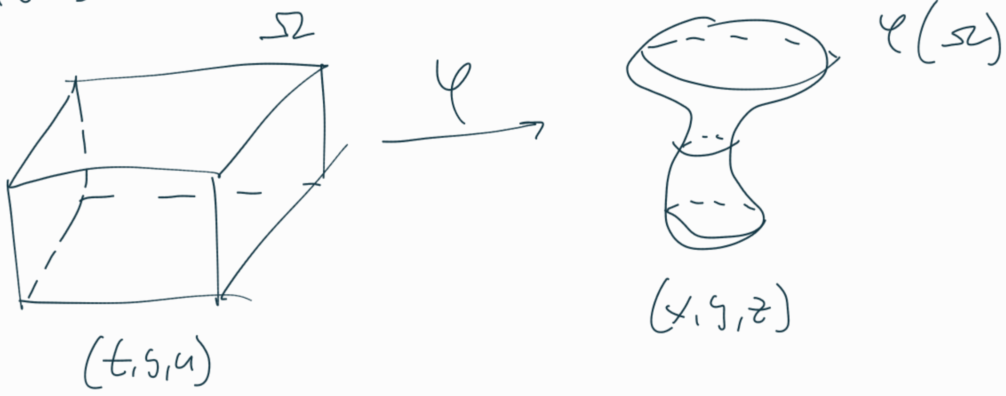
$$\Omega = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1-x_1,\dots,\ 0\le x_n\le 1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}\}$$

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_1$$

$$\iint\cdots\int_\Omega f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \cdots \int_0^1 x_1\, dx_n$$

3 Vpeljava novih koordinat. Znova imejmo integrabilno f-jo f in zvezno odvedljivo preslikavo $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^3$. Formula ostane enaka:

$$\iiint_{\varphi(\Omega)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(x(t,s,u), y(t,s,u), z(t,s,u))\, |\det J\varphi(t,s,u)|\, dt\,ds\,du.$$



ANALOG TE FORMULE VELJA TUDI ZA $n>3$.

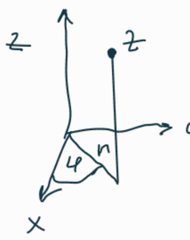
Primer: Cilindrične koordinate.

$x = r\cos\varphi$ $\quad r \geq 0$ polarni radij v ravnini (x,y)

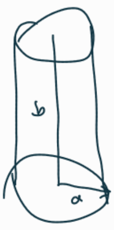
$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi \in [0,2\pi]$ polarni kot v ravnini (x,y)

$z = z$

od tod ime cilindrične? cilinder je valj, ki ima v njih posebej lepo izražavo:



to so polarne koordinate, ki jim dodamo višino z



$\varphi \in [0,2\pi]$

$r \in [0,a]$

$z \in [0,b]$

t.j. $g(\varphi,r,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

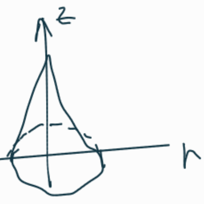
kvader $[0,2]\times[0,a]\times[0,b]$ slika v valj.

Zgled uporabe: stožec $\quad 0 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}$

izračunajmo volumen stožca

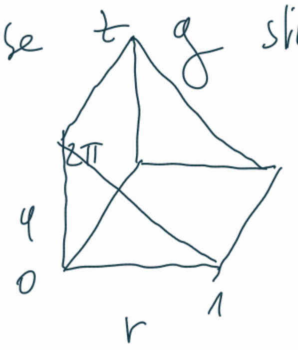
Kako se ta stožec izrazi v cilindričnih koordinatah?

$$z = 1-\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z = 1-r$$



$$\Omega = \{(\varphi,r,z);\ \varphi\in[0,2\pi],\ r\in[0,1],\ z\in[0,1-r]\}$$

Te območje v $\mathbb{R}^3$ se z g slika v stožec.



Za integracijo v cilindričnih koordinatah potrebujemo determinanto Jacobija. $\det J_g = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Spomnimo: $S(D) = \iint_D dx\,dy$ formula za ploščino lika $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

$V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$ formula za volumen telesa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Nas zanima volumen stožca $g(\Omega)$, ki ga izračunamo s substitucijo:

$$\iiint_{g(\Omega)} dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nove} \\ \text{koordinate}}}{=} \iiint_\Omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobi}}}{r}\, dr\,d\varphi\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1\int_0^{1-r} r\,dz\,dr = 2\pi \int_0^1\int_0^{1-r} r\,dz\,dr \overset{2\pi}{=} \int_0^1 rz\Big|_0^{1-r} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - r^2)\,dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Primer: sferične koordinate:

$x = R\cos\varphi\cos\psi$

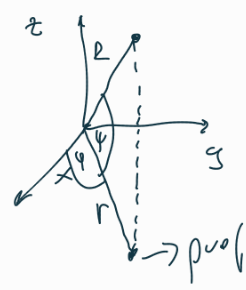
$y = R\sin\varphi\cos\psi$

$z = R\sin\psi$

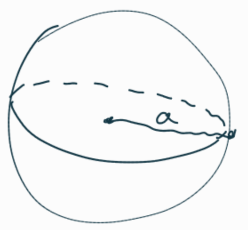
$R \geq 0$: oddaljenost od izhodišča

$\varphi \in [0, 2\pi]$ polarni kot v (x,y) ravnini

$\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sferni kot med R in r.



S sferičnimi koordinatami se lepo izrazi krogla in sfera.



krogla s polmerom $a > 0$:

$\varphi \in [0, 2\pi]$

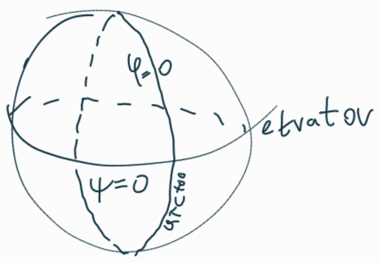
$\psi \in [0, 2\pi]$

$R \in [0, a]$ (za sfero $R = a$)

t.j. $g(R,\varphi,\psi) = (R\cos\varphi\cos\psi,\ R\sin\varphi\cos\psi,\ R\sin\psi)$ slika kvader $[0,a]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ v kroglo s polmerom a.

geom. interpret.:

izražava sfere v obliki poldnevnikov in vzporednikov:



za integracijo rabimo še Jacobijevo determinanto:

$$\det J_g = \begin{vmatrix} x_R & x_\varphi & x_\psi \\ y_R & y_\varphi & y_\psi \\ z_R & z_\varphi & z_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -R\sin\varphi\cos\psi & -R\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & R\cos\varphi\cos\psi & -R\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & R\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\psi \begin{vmatrix} -R\sin\varphi\cos\psi & -R\cos\varphi\sin\psi \\ R\cos\varphi\cos\psi & -R\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} + R\cos\psi \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -R\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & R\cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\cancel{\sin^2\varphi}\cos\psi\sin^2\psi + R^2\cancel{\cos^2\varphi}\cos\psi\sin^2\psi + R^2\cancel{\cos^2\varphi}\cos^3\psi + R^2\cancel{\sin^2\varphi}\cos^3\psi =$$

$$= R^2\cos\psi\sin^2\psi + R^2\cos^3\psi = R^2\cos\psi\cdot\left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\right) =$$

$$= R^2\cos\psi$$

OPOMBA: v nekaterih virih se pojavljajo tudi sferne koordinate, pri katerih ψ teče od 0 do π, t.j. $\psi = 0$ podaja severni/južni pol. Zanje je $|J| = R^2\sin\psi$.

ZGLED uporabe: izračunaj volumen polkrogle radija $a>0$.

v sfernih koordinatah se ta polkrogla izraža kot $\varphi\in[0,2\pi]$, $R\in[0,a]$, $\underbrace{\psi\in[0,\tfrac{\pi}{2}]}_{\text{le zgornja polobla}}$

$$V = \iiint\limits_{\underbrace{g(\Omega)}_{\text{polkrogla}}} dx\,dy\,dz \xrightarrow[\text{subst.}]{} \iiint\limits_{\Omega} r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$\overset{\text{fubini}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\psi\,dR\,d\varphi\,d\psi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\cos\psi\Big|_0^a\,d\psi =$$

$$= 2\pi\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi = 2\pi\frac{a^3}{3}\,\underbrace{\sin\psi\Big|_0^{\pi/2}}_{1} = 2\pi\frac{a^3}{3}$$

dodajmo še en integral in po istem območju

integrirajmo $f(x,y,z)=x$:

$$\iiint\limits_{g(\Omega)} x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} \underbrace{R\cdot\cos\varphi\cos\psi}_{x}\,\underbrace{R^2\cos\psi}_{\det J_\varphi}\,dR\,d\psi\,d\varphi =$$

$$= \cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} R^3\cos^2\psi\,dR\,d\psi = 0$$