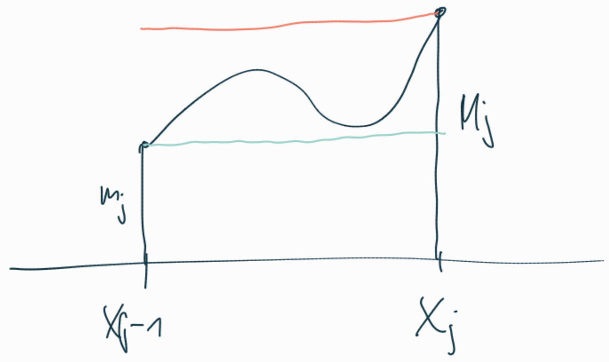
ANA3 PFMF 2024-10-29



$$S(f,D)=\sum_{j=1}^{n} M_j\,(x_j-x_{j-1})$$

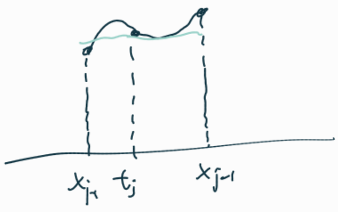
$$s(f,D)=\sum_{j=1}^{n} m_j\,(x_j-x_{j-1})$$

f integrabilna $\Leftrightarrow$

$$\sup_D s(f,D)=\inf_D S(f,D)$$

To je bila Darbouxova definicija integrabilnosti; poznamo pa tudi ekvivalentno Riemannovo definicijo. Slednja ima poleg delilnih še testne točke: $t_j \in [x_j, x_{j-1}]$.

$$R(f,D,\tilde{t})=\sum_{j=1}^{n} f(t_j)\,(x_j-x_{j-1})$$



Def.: f je riemanovo integrabilna, če obstaja $\lim_{\max(x_j-x_{j-1})\to 0} R(f,D,\tilde{t})$ in je neodvisna od izbora D in $\tilde{t}$.

Kot vemo sta definiciji ekvivalentni in označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx := \inf_D S(f,D)=\sup_D s(f,D)=\lim_{\max(x_j-x_{j-1})\to 0} R(f,D,\tilde{t})$$

kot nedoločen integral f na $[a,b]$

Osnovni izrek analize pove, kako se to računa v praksi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b = \int f(x)\,dx\Big|_a^b$$

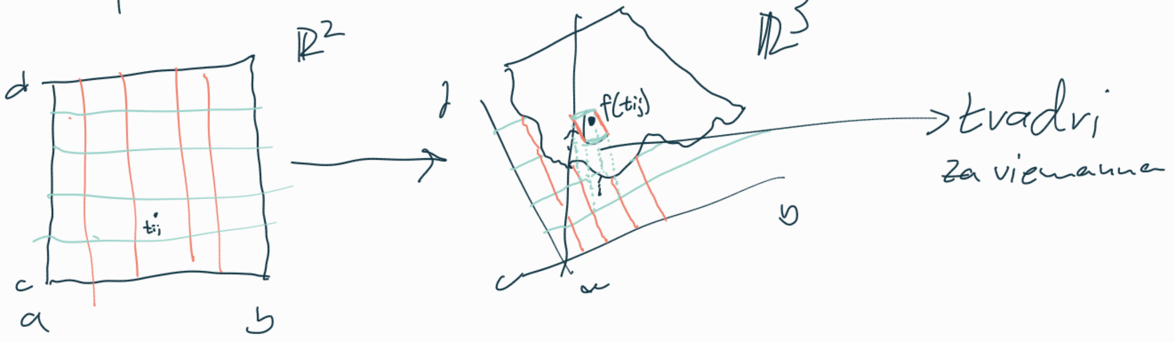
primitivna fja / nedoločen integral

Katere fje so integrabilne?

- zvezne na $[a,b]$, saj so tudi enakomerno zvezne in lahko izbereš $\delta>0$, da iz $|x_j-x_{j-1}|<\delta$ sledi, da je $|M_j-m_j|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
- odsekoma zvezne omejene fje na $[a,b]$, t.j. dopustimo lahko tudi do končno mnogo točk nezveznosti ~ nezveznih ~~točk~~.

To teorijo bomo sedaj posplošili za fje dveh spremenljivk.

let $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ omejena f-ja dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku.



Delitev D: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$

$P_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$ en pravokotnik delitve

$pl_{ij} = (x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$ njegova ploščina

Darbouxovi vsoti: $M_{ij} = \sup_{x\in P_{ij}} f(x)$; $m_{ij} = \inf_{x\in P_{ij}} f(x)$

$$S(f,D) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} M_{ij}\cdot pl_{ij} \qquad s(f,D) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} m_{i,j}\cdot pl_{ij}$$

Riemannova vsota: dodamo še testne točke: $t_{ij}\in P_{ij}$.

$$R(f,D,\vec{t}) := \sum_{i,j=1,1}^{n,m} f(t_{ij})\cdot pl_{ij}$$

V splošnem velja

$$s(f,D) \le R(f,D,\vec{t}) \le S(f,D)$$

vse tri vsote pa podajajo približek za pričakovan volumen pod grafom f nad pravokotnikom $[a,b]\times[c,d]$.

__Def.:__ f je integrabilna na $[a,b]\times[c,d] \iff$

$$s(f,D) = S(f,D) = \lim_{\substack{\max(x_i - x_{i-1})\to 0\\ \max(y_j - y_{j-1})\to 0}} R(f,D,\vec{t}) =: \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

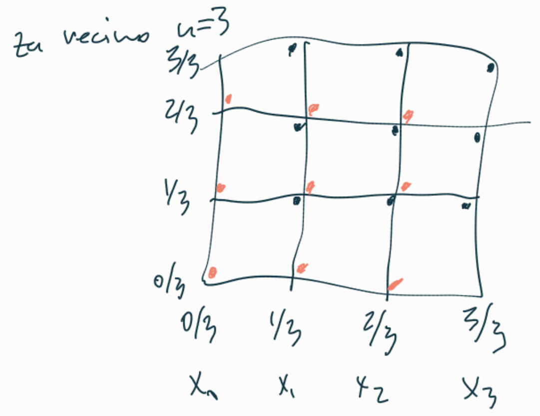
__Opombi:__ I. pri limiti $pl_{ij}\to 0$ ni dovolj, saj lahko pošljemo ~~zgolj~~ $x_i - x_{i-1}\to 0$ in bo že $pl_{ij}\to 0$, mi pa zahtevamo krčenje pravokotnikov v obe dimenziji.

II. V tej definiciji je že privzet Riemannov izrek, ki vzpostavi ekvivalenco med Darbouxovo in Riemannovo integrabilnostjo, mi ga ne bomo dokazali (lani smo ga pri Anal1 za f-je 1 spremenlj.)

Primer: $f(x,y)=x+2y$ na $[0,1]\times[0,1]$. opazovali bomo kar ekvidistantni delitvi $[0,1]$. let $n\in\mathbb{N}$: $x_i=\frac{i}{n}$; $i\in\{0..n\}$

$y_j=\frac{j}{n}$; $j\in\{0..n\}$

za večino $n=3$



$M_{ij}=f(x_i,y_j)=x_i+2x_j=\frac{i+2j}{n}$

↳ maksimum je dosežen v desnem zgornjem oglišču P_{ij}

$m_{ij}=f(x_{i-1},y_{j-1})=x_{i-1}+2x_{j-1}=\frac{i-1+2(j-1)}{n}$

↳ min pa v levem sp. ogl.

zaradi ekvidistantnosti: $|P_{ij}|=\frac{1}{n^2}$

$$S(f,D)=\sum_{i,j=1,1}^{n,n} M_{ij}|P_{ij}|=\sum_{i,j=1,1}^{n,n}\frac{i+2j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{i,j=1,1}^{n,n} i+2j=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i,j=1,1}^{n,n} i+2\sum_{i,j=1,1}^{n,n} j\right)=\frac{1}{n^3}\left(n\sum_{i=1}^{n} i+2n\sum_{j=1}^{n} j\right)=$$

še vedno štejemo po i in po j!

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+2\,\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{3n(n+1)}{2n^2}=\frac{3(n+1)}{2n}$$

$$s(f,D)=\dots=\frac{3(n+1)-6}{2n}=S(f,D)-\frac{3}{n}=\frac{3(n-1)}{2n}$$

$$\sup_D s(f,D)\geq\frac{3(n-1)}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{2}\qquad \inf_D S(f,D)\leq\frac{3(n+1)}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{2}$$

↳ vse, ne le ekvist.

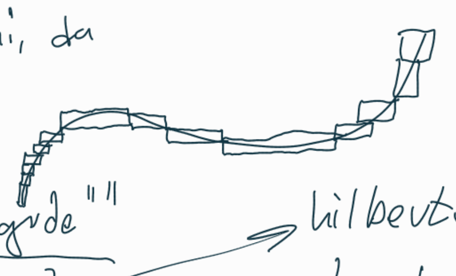
izrek o sendviču.

integral od f na $[0,1]\times[0,1]$ je enak $3/2$.

katere fje so integrabilne na $[a,b]\times[c,d]$?

- zvezne. dokaz je podoben kot pri fjah 1 spr.: izbereš $\delta>0$: $|x_i-x_{i-1}|<\delta \wedge |y_j-y_{j-1}|<\delta \Rightarrow |M_{ij}-m_{ij}|<\frac{\varepsilon}{(b-a)(c-d)}$
- take, ki imajo množico nezveznosti s ploščino 0. kaj to pomeni? množica nezveznosti mora biti taka, da jo lahko pokrijemo s števno unijo pravokotnikov, katerih skupna ploščina je manjša od ε.

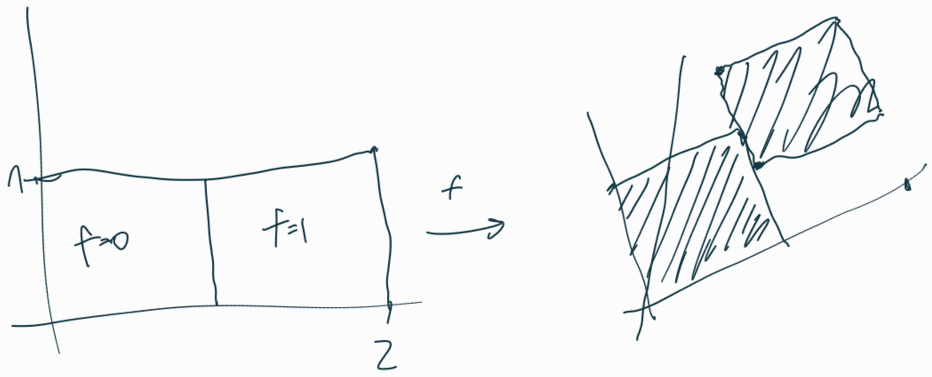
„v praksi to pomeni, da so nezveznost lahko krivulje, ki niso „preveč grde""



hilbertova krivulja bi se torej štela kot „preveč grda".

Primer: $f(x,y)=\lfloor x \rfloor$ na $[0,2]\times[0,1]$

Naj D delitev, ki vsebuje tudi $x_k=1$ za nek $k\in\{1..n\}$.



potem velja:

$M_{ij}=0$ za $i<k$ $\qquad$ $m_{ij}=0$ za $i\le k$

$M_{ij}=1$ za $i\geq k$ $\qquad$ $M_{ij}=1$ za $i>k$

$$S(f,D)=\sum_{i,j=1,1}^{n,m} M_{ij}\cdot pl_{ij} = 1+(x_k-x_{k-1})$$

$$s(f,D)=\sum_{i,j=1,1}^{n,m} m_{ij}\, pl_{ij} = 1$$

„kvečjemu večji" (za $\geq$) -- Uroš Kuzman

torej velja $\sup_D s(f,D)\geq 1$

$\inf_D S(f,D)\leq 1+(x_k-x_{k-1})$

ko pošljemo $x_{k-1}\to x_k=1$, dobimo ujemanje:

t.j. $$\iint_{[0,2]\times[0,1]} \lfloor x\rfloor\, dx\,dy=1$$

geometrijska opazka: pri $n=1$ smo smeli imeti končno mnogo točk nezveznosti; te lahko interpretiramo kot objekte dimenzije 0.

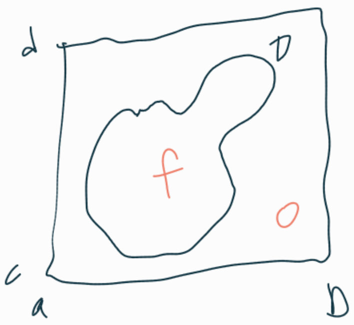
pri $n=2$ dopuščamo končno mnogo „lepih krivulj", kjer je f nezvezna. te lahko interpretiramo kot objekte dimenzije 1.

podobno bo za $n\geq 3$ dovoljeno imeti nezveznosti dimenzije $n-1$.

primer neintegrabilne f-je:

$$f(x,y)=\begin{cases}0\,; & x,y\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2\\ 1\,; & x,y\in\mathbb{Q}^2\end{cases}$$ nezvezna je povsod.

kaj pa, če želimo integrirati po območju $D\subseteq\mathbb{R}^2$, ki je omejeno, a ni pravokotnik?



Ker je D omejeno, $\exists$ pravokotnik $[a,b]\times[c,d]$ $\exists$: $D \subseteq [a,b]\times[c,d]$. f jo razširimo takole.

$$\tilde{f} : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \ x,y \in D \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

sedaj lahko definiramo $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dx := \iint_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$

t.j. integral f po D definiramo s pomočjo razširitve $\tilde{f}$, ki jo integriraš po pravokotniku, ker znamo od prej.

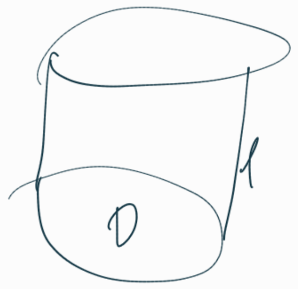
tak integral $\exists \Leftrightarrow f$ omejena in ima rob s ploščino enako 0.

LASTNOSTI DVOJNEGA INTEGRALA

Oznaka za rob območja D je ∂D (množica robnih točk)

- $\displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy = S(D)$ ↳ ploščina D

velja, če integr. na levi $\exists$



- običajna pravila, ki sledijo iz delitev

$$\iint_D (\alpha f)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f\,dx\,dy, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\iint_D (f+g)\,dx\,dy = \iint_D f\,dx\,dy + \iint_D g\,dx\,dy$$

$$\left| \iint_D f\,dx\,dy \right| \le \iint_D |f|\,dx\,dy$$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy, \quad \text{če } D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

- Fubinijev izrek

Če je f integrabilna na $[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$ in je $x\mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[a,b]$ $\forall y\in[c,d]$ ter $y\mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[c,d]$ $\forall x\in[a,b]$, $\Longrightarrow$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

Ta izrek pove, kako se dvojne integrale računa v praksi s prehodom na dva enojna integrala.

Primer:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 x+2y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xy+\frac{2y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 x+1\,dx = \frac{x^2}{2}+x\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}$$

D.N. preveri, da lahko obrneš vrstni red.