POSPLOŠENI / IZLIMITIRANI INTEGRAL S PARAMETROM

Določeni integral se definira za omejeno fjo na zaprtem in omejenem intervalu. Posplošimo ga lahko v dve smeri, tjer osnovno definicijo limitiramo

① OMEJENA fja na neomejenem intervalu.
$f : [a, \infty) \to \infty$ omejena.

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

↳ nedoločen integral za f na $[a,\infty)$

KDAJ OBSTAJA? KADAR SE $f(t)$ v $t=\infty$ obnaša kot $1/t^\alpha$, $\alpha > 1$.

② NEOMEJENA fja na omejenem intervalu

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ima pol v a.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{a'\downarrow a} \int_{a'}^b f(t)\,dt = F(b) - \lim_{a'\downarrow a} F(a')$$

kdaj obstaja? kadar se $f(t)$ v $t=a$ obnaša kot $\frac{1}{\alpha^t}$, $\alpha < 1$.

Primeri:

① • $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{-1} = 0 + 1 = 1$

• $\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^\infty = \lim_{t\to\infty} \ln t - \ln 1 = \infty$ (ne obstaja)

(2.) • $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{t^{1/2}}{1/2}\Big|_0^1 = 2\sqrt{1} - \lim_{t\downarrow 0} 2\sqrt{t} = 2$

• $\int_0^1 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_0^1 = \ln 1 - \lim_{t\downarrow 0} \ln t = \infty$ (ne obstaja)

seveda pa lahko en integral združuje tudi oba tipa (1 in 2) singularnosti. npr.: $\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ ne obstaja za noben $\alpha \in \mathbb{R}$.

za $\alpha \leq 1$ je problem v $t=\infty$,

za $\alpha \geq 1$ pa v $t=0$.

NAŠ CILJ je v tovrstne posplošene integrale dodati parameter in posplošiti izreke 1, 2 in 3.

Začnimo s par primeri:

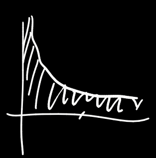
(1) $F(x) = \int_1^\infty \frac{dt}{t^x}$ KER mora biti stopnja v neskončnosti >1, vemo, da je $D_F = (1, \infty)$.

Ta primer lahko celo izrazimo:

$$F(x) = \frac{t^{-x+1}}{-x+1}\Big|_1^\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-x}\cdot\underbrace{\frac{1}{t^{\boxed{x-1}}}}_{\to 0} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

ker je $x>1$, je to pozitivno

(2) $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x}$

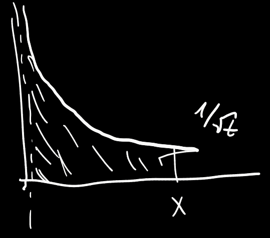


KER MORA BITI POL STOPNJE <1, je $D_F = (-\infty, 1)$.

spet ga izračunamo: $F(x) = \frac{t^{-x+1}}{-x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-x} - \lim_{t\downarrow 0} \underbrace{\frac{t^{1-x}}{1-x}}_{\to 0}$

ker je $x<1$, je to pozitivno

(3) $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$



ker je pod stopnje $\frac{1}{2}$, integral vedno obstaja, razen za $x<0$, ker $\sqrt{t}$ ni definiran za $t<0$. torej je $D_F = x \in [0,\infty)$

$$F(x) = \frac{t^{1/2}}{1/2}\Bigg|_0^x = 2\sqrt{x} - 0 = 2\sqrt{x}$$

OPAZKA $F(x) \longrightarrow \infty$ za $x \to \infty$, kar je smiselno, saj je $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} = \infty$, saj potenca $\alpha = \frac{1}{2}$ ne zadošča za konvergenco v $t=\infty$.

SEDAJ si oglejmo primer, ki bo ključen v kontekstu posplošitve izrekov. In sicer:

$$F(x) = \int_0^\infty x\, e^{-tx}\, dt \qquad \text{ta integral } \exists \text{ za } x=0 \text{ in } x>0$$

dopolnjujem zvečer iz zvezka

velja $F(0)=0$ (očitno); $\frac{1}{e^{tx}}$ gre hitreje k 0 kot npr $\frac{1}{t^2}$, ko gre $t \to \infty$

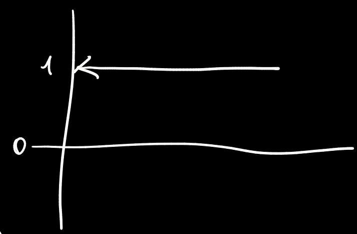
Po drugi strani pa $x=0$ ne obstaja, kajti $\lim_{t\to\infty} e^{-tx} = \infty$:

Opazimo tudi, da je integrand $f(x,t) = xe^{-tx}$ zvezna f-ja na $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Pričakovali bi torej, da je tudi $F(x)$ zvezna na $[0,\infty)$ -- po izreku 1. Toda izkaže se, da temu ni tako.

$x=0: \; F(0)=0$

$$x>0: \; F(x) = x\,\frac{e^{-tx}}{-x}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = -\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-tx}} + 1 = 1$$

torej $F(x) = \begin{cases} 0; & x=1 \\ 1; & x>0 \end{cases}$



in jasno ni zvezna fja v $x=0$.

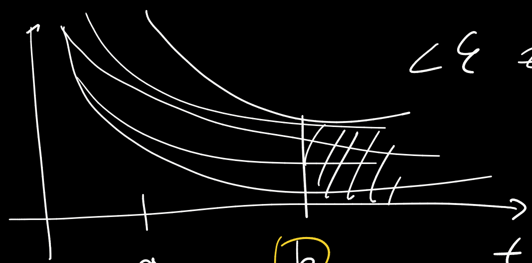
MORALA: za izreke 1, 2, 3 pri izlimitiranih integralih s parametrom potrebujemo še nek dodaten pogoj.

KONEC VEČERNEGA DOPOLNJEVANJA

meta: ZMANJKALO BATERIJE, Pet minut pisal v ISRM zvezek VII.

... Ta dodatni pogoj je t.i. enakomerna konvergenca, ki jo bomo podrobneje predstavili za prvi tip izlimitiranih integralov.

Def.: integral s parametrom $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ je enakomerno konvergiten za $x \in [c,d]$, če $\forall \varepsilon > 0\ \exists b > a\ \forall x \in [c,d]: \left|\int_b^\infty f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$.



SLABA SITUACIJA: $f(x,t) = x e^{-xt}$ (primer od prej).

Težava: Ko gre $x \downarrow 0$, gre $e^{-xt} \to 1$.

Za male x je ta fja skoraj enaka premici $f(x,t) = x$

Preveriti se da celo, da za $x' < x$ graf pri x' konča nad grafom od x

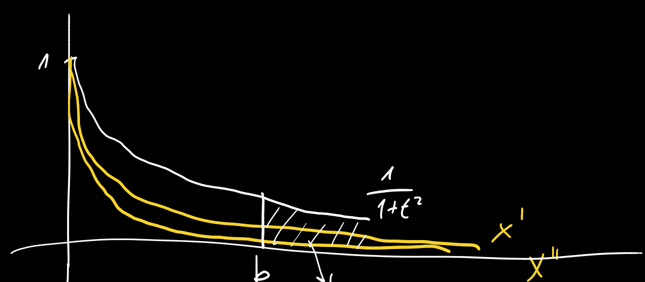
ne moreš trditi, da so vse ploščine za $x \geq 0$ manjše od $\varepsilon > 0$.

Dobra situacija: $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ oz. $F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$

Ta integral je definiran le za $x \geq 0$.

Vendar vidimo, da je $|e^{-xt}| \leq 1\ \forall x \geq 0$. Potemtakem

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$$



Za vsak $\varepsilon > 0\ \exists b > 0$, ki pripada $\frac{1}{1+t^2}$, da bo dober za vse $x \geq 0$.

Iz tega primera razberemo tudi način, kako se enakomerna konvergenca običajno preveri v praksi. (zadosten pogoj).

IZREK:

Če $\exists g: [a,\infty) \to \mathbb{R}$, za katero velja $|f(x,t)| < g(t)$ $\forall x \in [c,d]$ in je $\int_a^\infty g(t)\,dt < \infty$, potem je $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enakomerno konvergenten na $[c,d]$. Tej fji g rečemo tudi MAJORANTA.

Posplošitev izrekov 1,2,3:

① Let $f(x,t)$ zvezna na intervalu $[c,d] \times [a,\infty)$ in $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enak. konv. na $[c,d]$, potem je F zvezna na $[c,d]$.

② Let $f(x,t)$ zvezna in zv. parc. odv. po x na $[c,d] \times [a,\infty)$ ter naj bo $F(x) = \int_a^d f(x,t)\,dt$ konvergenten na $[c,d]$,

$\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dt$ pa enakomerno konvergenten na $[c,d]$.

Potem je $F'(x) = \int_a^\infty f_x(x,t)\,dt$.

③ Let $f(x,t)$ zvezna na $[c,d] \times [a,\infty)$ in $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enak. konv. na $[c,d]$, potem velja

$$\int_c^d F(x)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x,t)\,dt \right) dx =$$

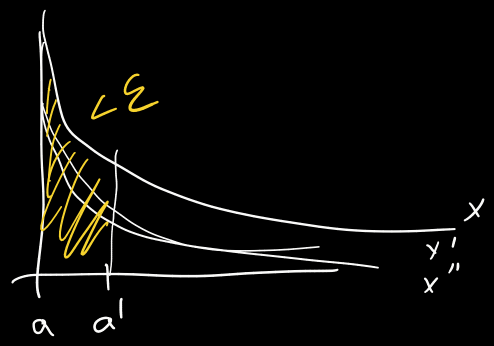
$$= \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,t)\,dx \right) dt$$

z rumeno so označeni ti dodatni pogoji

KOMENTAR: znova je izrek 2 najbolj strog kor se tiče pogojev: potrebujemo enak. konv. $\int_a^\infty f_x(x,t)\,dt$.

KOMENTAR: enako posplošitev lahko naredimo tudi za izlimitirane integrale 2. tipa t.j. $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$, $x\in[c,d]$ in f ima pole v $t=a$,

če enakom. konv. v $[c,d]$, če
$\forall \varepsilon>0\ \exists a'\in[a,b]\ \forall x\in[c,d]: \left|\int_a^{a'} f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon.$



spet iščemo majoranto, t.j.
$|f(x,t)| < g(x)\ \forall x\in[c,d]$
in $\int_a^b g(t)\,dt < \infty$

PRIMER:

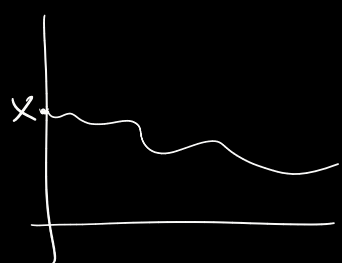
$$F(x)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{te^t}\,dt \qquad D_F = ?$$

dve singularnosti: pol pri $t=0$ in neomejeno območje $t=\infty$

$$t=0: \quad \frac{1-e^{-xt}}{te^t} \overset{\text{taylor}}{=} \frac{1-\left(1-xt+\frac{xt^2}{2!}-\dots\right)}{te^t} = \frac{x+\frac{x^2 t}{2!}+\frac{x^3 t^2}{3!}}{e^t}$$

$$\text{opazimo, da } \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-e^{-xt}}{te^t} \overset{\text{L.H.}}{=} \frac{xe^{-xt}}{e^t+te^t} = x$$

sklep: tega pola ni – f-ja ni omejena, vedno se začne v x.



ogledamo si še $t=\infty$: za $x<0$ nimamo konvergence, saj $e^{-xt}\to\infty$ za $t\to\infty$

za $x \geq 0$ pa konvergenco imamo, saj $|1-e^{-xt}| \leq 1$.

ker je $e^t > t$, je $\frac{1}{e^t \cdot t} < \frac{1}{t^2}$ za velike t.

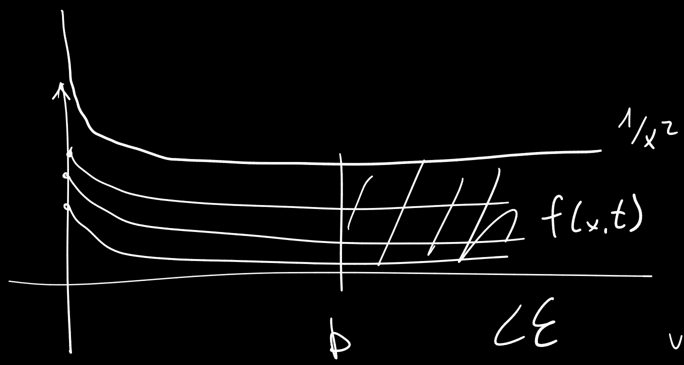
Torej se integrand bliža 0 hitreje kot $\frac{1}{t^2}$ in imamo konvergenco.

SKLEP: $D_F = [0,\infty)$. t.j. F konvergira na $[0,\infty)$.

A je konvergenca enakomerna?

$$\left|\frac{1-e^{-xt}}{t e^t}\right| \leq \frac{1}{t^2} \quad \forall x \in [0,\infty)$$

Vemo, da $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1 < \infty$, zato imamo enakomerno konvergenco.



vzamemo $b > 1$.

SKLEP: F je zvezna na $[0,\infty)$ po posplošitvi izreka 1.

2. a smemo F odvajati pod integralom?

$$f_x(x,t) = \left(\frac{1-e^{-xt}}{te^t}\right)' = \frac{e^{-xt}\cdot \cancel{t}}{\cancel{t}e^t} = e^{-(x+1)t}$$

Potrebujemo enak. konv. $\int_0^\infty e^{-(x+1)t}\,dt$ za $x \in [0,\infty)$.

Dobimo jo z majoranto. $e^{-(x+1)t} < e^{-t}$ $\forall x \in [0,\infty)$.

in $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 < \infty$. SKLEP: F odvedljiva na $[0,\infty)$ in
$F'(x) = \int_0^\infty e^{-(x+1)t}\,dt$.

ZAKLJUČNA OPAZKA: $F'(x) = \int_0^\infty e^{-(x+1)t}\,dt$ znamo integrirati:

$$F'(x) = \int_0^\infty e^{-(x+1)t}\,dt = \frac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = 0 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

točno mora vrijediti, da je $F(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{te^t}\,dt = \ln(x+1) + C$

$\forall x \geq 0$

kako je $F(0) = 0 \implies C = 0 \implies F(x) = \ln(x+1)$.