ANA3PFMF 2024-10-08

$$F(x) = \int_c^d f(x,t)\, dt$$

f zvezna na $[a,b] \times [c,d] \Rightarrow F$ zvezna na $[a,b]$

let $\delta := \min \delta(x_0, t_0)$
$t_0 \in [a,b]$
$x_0 \in [c,d]$

$$\left| \sqrt{(x-x_0)^2 - (t, t_0)^2} \right| < \delta(x_0, t_0) \xRightarrow{\text{zvez } f} |f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \varepsilon$$

Če torej izberemo $x, x_0 \in [a,b]$ tako, da je $|x - x_0| < \delta$, imamo

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_c^d f(x,t)dt - \int_c^d f(x_0,t)\,dt \right| \leq$$

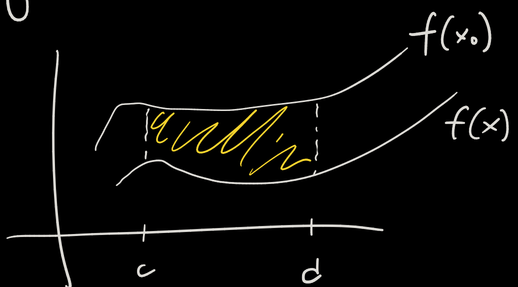
$$\leq \int_c^d |\underbrace{f(x,t) - f(x_0-t)}_{}|\, dt \leq$$

tja se upenata,
$|x-x_0| < \delta \leq \delta(x_0,t_0)$

$$\leq \int_c^d \varepsilon\, dt = \varepsilon \cdot (d-c)$$

če bi začeli z $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{d-c}$, bi dobili željeno neenakost.

t.j. $|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$



dokazali smo: ČE SE INTEGRANDI SPREMINJAJO ZVEZNO, SE TUDI PLOŠČINE SPREMINJAJO ZVEZNO.

Primer:

$$F(x)=\int_0^1 e^{-(x+t)^2}\,dt$$

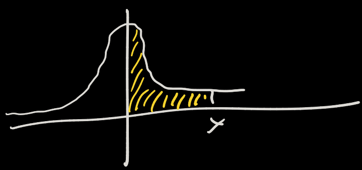
Znano je, da F ni elementarna fja, torej F ne moremo izraziti, a vseeno po zgornjem dokazanem izreku vemo, da je F zvezna.

$$f(x,t)=e^{-(t+x)^2} \text{ zvezna na } \mathbb{R}\times[0,1] \Rightarrow F \text{ zv. na } \mathbb{R}$$

Vprašanje: Kaj če bi bil parameter v meji?

$$G(x)=\int_0^x e^{-t^2} = Erf(x)$$

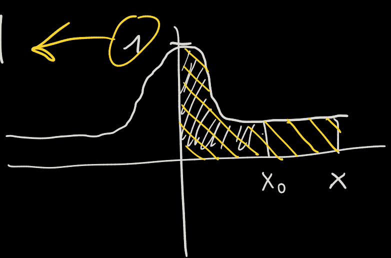
tej fji se reče ERROR FUNCTION:



Za to fjo ne moremo uporabiti izreka, saj meje niso fiksne, lahko pa zveznost dokažemo direktno:

$$|G(x)-G(x_0)| = \left|\int_0^x e^{-t^2}dt - \int_0^{x_0} e^{-t^2}dt\right| = \left|\int_{x_0}^x e^{-t^2}dt\right| \le$$

$\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-t^2}=1$



$$\le \left|\int_{x_0}^x e^{-t^2}dt\right| \le \left|\int_{x_0}^x 1\,dt\right| \le |x-x_0|<\varepsilon$$

Za $\delta=\varepsilon$ velja $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$

Izrek I.

Let f zvezna na $[a,b]\times[c,d]$ in parcialno zvezno odvedljiva po x, potem je odvedljiva tudi

$$F(x)=\int_c^d f(x,t)\,dt$$

in velja, da je

$$F'(x)=\int_c^d f_x(x,t)\,dt\,,$$

tj. lahko odvajamo pod integ.

Dokaz izreka II:

odvisna od t

V vsakem primeru izberemo $\xi(t)$ med x in x_0, da pri fiksnem $t\in[c,d]$ velja, da je

$$f(x,t)-f(x_0,t)=f_x(\xi,t)(x-x_0)$$

> Spomnimo se Lagrangevega izr.
>
> Let g zvezna na $[a,b]$ in odv. na (a,b), potem $\exists c\in(a,b)\ \ni: g'(c)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$
>
> $\sim$
>
> $g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)$

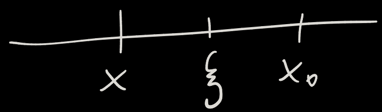
Izračunajmo $F'(x_0)$ po definiciji.

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^d f(x,t)\,dt-\int_c^d f(x_0,t)\,dt\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_c^d\left(f(x,t)-f(x_0,t)\right)dt\overset{\text{Lagran.}}{=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cancel{x-x_0}}\int_c^d f_x(\xi,t)\cancel{(x-x_0)}\,dt=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\int_c^d f_x(\xi,t)\,dt\overset{\text{zveznost na kompaktu}}{=\!=}\int_c^d\lim_{x\to x_0}f_x(\xi,t)\,dt=\int_c^d f_x(x_0,t)\,dt$$

po izbiri ξ gre ξ proti x_0 ko gre x proti x_0, ker



$$\lim_{x\to x_0}f_x(\xi,t)=$$

ker je f_x zvezna in lahko nesemo lim v njen argument

$$=f_x\left(\lim_{x\to x_0}\xi,t\right)=$$

$$=f_x(x_0,t)$$

SKLEP:

$$F'(x_0)=\int_c^d f_x(x_0,t)\,dt$$

Primeri:

(1.) $F(x) = \int_0^1 tx\,dt = \frac{x}{2}$

$$F'(x) \overset{\text{direktno}}{=} \frac{1}{2}$$

$$\overset{\text{izrek}}{=} \int_0^1 \frac{\partial tx}{\partial x}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

izrek smo lahko uporabili, ker je xt zvezna na $\mathbb{R}\times[0,1]$ in zvezno parcialno odvedljiva po x na tem območju.

(2.) $F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt \overset{\text{zadnjič}}{=} \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & ; x\neq 0 \\ 1 & ; x=0 \end{cases}$

tudi $f(x,t)=e^{xt}$ je zvezna in zv. p. odv. po x na $\mathbb{R}\times[0,1]$, lahko uporabimo izrek. Preverimo, da dobimo enak odvod kot direktno.

let $x\neq 0$

$$F'(x) \overset{\text{direktno}}{=} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = -\frac{e^x-1-xe^x}{x^2}$$

$$\overset{\text{po izreku}}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xt}\right)dt = \int_0^1 t e^{xt}\,dt$$

$u=t$
$du=dt$
$v=\frac{e^{xt}}{x}$

$$= t\frac{e^{xt}}{x}\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{e^{xt}}{x}\,dt = \frac{e^x}{x} - 0 - \frac{e^{xt}}{x^2}\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{e^x-1}{x}$$

IZBOLJŠANA RAZLIČICA IZREKA II.

Let $u,v:[a,b]\to[c,d]$ ter f taka, kot v izreku II. Potem je odvedljiva tudi fja $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$ ter za njen odvod velja

$$F'(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)\,dt + v'(x)\,f(x,v(x)) - u'(x)\,f(x,u(x))$$

NE BOMO DOKAZALI.

Komentar: ta izrek je posplošitev/izboljšava osnovnega izreka analize.

$$\int_a^x f(t)\,dt \overset{\text{naš}}{\underset{\text{izrek}}{=}} \int_a^x \cancelto{0}{f_x(t)}\,dt + \cancelto{1}{(x)'}\,f(x) - \cancelto{0}{(a)'}\,f(a) = f(x)$$

Primer:

1. $F(x)=\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

$$F'(x) \overset{\text{direktno}}{=} x$$

$$F'(x) \overset{\text{po izreku}}{=} \int_0^x \cancelto{0}{\frac{\partial t}{\partial x}}\,dt + (x)'\,x - (0)'\cdot 0 = x$$

2. $Erf(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

DIREKTNO NE ZNAMO, VEMO PA, DA JE PO IZREKU ODVOD ENAK

$$F'(x)=\int_0^x \cancelto{0}{\frac{\partial e^{-t^2}}{\partial x}}\,dt - (x)'\,e^{-x^2} - (0)'\,e^{0} = e^{-x^2}$$

To je primer neelementarne fje z elementarnim odvodom.

③ $F(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\,dt$ je neelementarna, toda

$$F'(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin(xt)}{t}\,dt+(x)'\,\frac{\sin x^2}{x}-2(x^2)'\,\frac{\sin x^3}{x^2}=$$

$$=\int_{x^2}^{x}\frac{\cos(xt)\,\cancel{t}}{\cancel{t}}\,dt+\frac{\sin x^2}{x}-2\,\frac{\cancel{x}\sin x^3}{x^{\cancel{2}}}=\left.\frac{\sin(xt)}{x}\right|_{t=x^2}^{t=x}+\frac{\sin x^2}{x}-\frac{\sin x^3}{x}$$

$$=2\,\frac{\sin x^2}{x}-3\,\frac{\sin x^3}{x}$$

Izrek II: naj bo f zvezna na $[a,b]\times[c,d]$, potem je $F(x)=\int_c^d f(x,t)\,dt$ integrabilna na $[a,b]$ in velja

$$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,dt\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,dx\right)dt$$

tj. lahko zamenjamo vrstni red.

Dokaz Izreka II:

Iz izreka I vemo, da je F zvezna na $[a,b]$ in posledično tudi integrabilna.

Definirajmo dve zvezni f-ji: $G(x)=\int_a^x F(s)\,ds$

$$H(x)=\int_c^d\left(\int_a^x f(s,t)\,ds\right)dt$$

MI ŽELIMO POKAZATI, DA JE

$$G(b)=H(b)$$

Strategija: dokažemo enakost odvodov in konstantnega odstopanja.

$G'(x) = F(x)$ po osnovnem izreku analize

po izboljšanem izreku II:

$$H'(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x f(s,t)\,ds\right) dt = \int_c^d f(x,t)\,dt = F(x)$$

sklep: G in H se razlikujeta za konstanto.

$$G(a) = \int_a^a f(s)\,ds = 0$$

$$H(a) = \int_c^d \left(\int_a^a f(s,t)\,ds\right) dt = 0$$

sklep: konstanta je $0 \Rightarrow G = H \Rightarrow G(b) = H(b)$

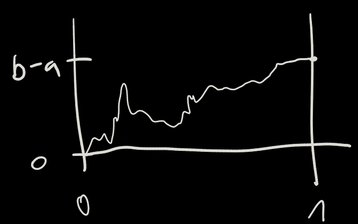
Primer uporabe:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \;; \quad 0 < a < b$$

Tega ne znamo direktno integrirati, lahko pa premislimo, da obstaja, saj je $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

lahko bi imeli težavo v $x = 1$:

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\underbrace{x^b - x^a}_{\to 0}}{\underbrace{\ln x}_{\to 0}} \overset{L.H.}{=} \lim_{x \uparrow 0} \frac{b x^{b-1} - a x^{a-1}}{1/x} = \lim_{x \uparrow 1} \left(b x^b - a x^a\right) = b - a$$



√ ni težave.

po predpostavki: x med 0 in 1.

Poskusimo uporabiti izrek. $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \frac{x^t}{\ln x}\Big|_{t=a}^{t=b} = \int_a^b x^t\,dt$

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^t\,dt\right) dx \overset{izv. II}{=} \int_a^b \left(\int_0^1 x^t\,dx\right) dt = \int_a^b \frac{x^{t+1}}{t+1}\Big|_{x=0}^{x=1} dt =$$

↳ integrand $f(x,t) = x^t$ je zvezen na $[0,1] \times [a,b]$.

$$= \int_a^b \frac{1}{t+1}\,dt = \ln(t+1)\Big|_{t=a}^{t=b} = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

UGOTOVILI SMO, da je pri „drugih integralih" vrstni red ključen za izračun.