ANA3p FMF 2024-10-01

Snov:

Integriranje
- 1,2,3 spr.
- krivulje
- $\mathbb{C}$

prof. Uroš Kuzman
asist. Daniel Vitas

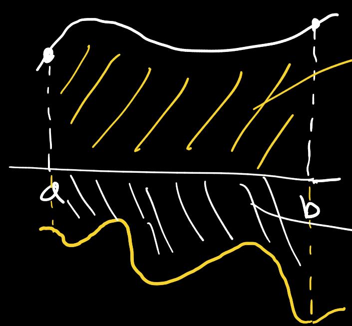
2 kolokvija zadostaje za izpit iz vaj
3 izpitni roki
pisni teoretični izpit

vaje $66,\overline{6}\,\%$ + 40% minimum za obje
teorija $33,\overline{3}\,\%$
+ kvizi za dodatne točke

## [Integrali s parametrom]

Ideja: Obravnavali bomo funkcije, katerih predpis je podan s pomočjo določenega integrala.

Spomnimo: Določeni integral je operacija, ki trojici $f, a, b$ priredi realno število.



$$I = \overbrace{\int_a^b f(t)\,dt}^{\in \mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}$$

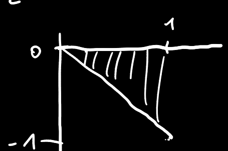
$$I = \underbrace{\int_a^b g(t)\,dt}_{\in \mathbb{R}^-} \in \mathbb{R}$$

da ta predpis pretvorimo v funkcijo, imamo dva osnovna načina:

- variiramo integrand:

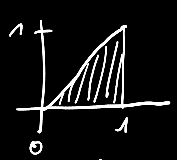
$$F(x) = \int_0^1 x t \, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

za $x=-1$:



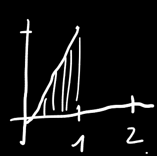
$F(-1) = -\frac{1}{2}$

za $x=1$:



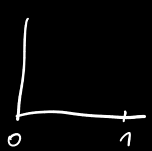
$F(1) = \frac{1}{2}$

za $x=2$:



$F(2) = 1$

za $x=0$:



$F(0) = 0$

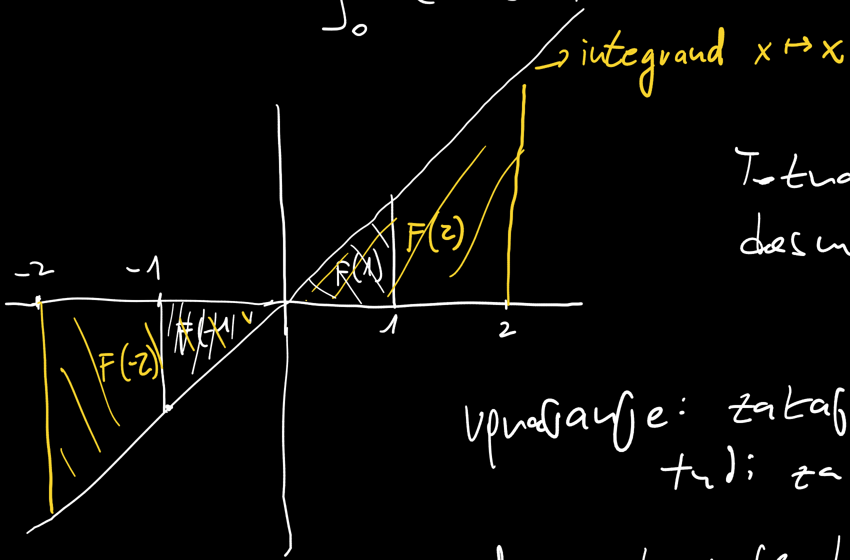
$F(x)$ je podana s ploščino za konkreten $x$.

Na primer je sila preprost, saj lahko $x$ izrazimo:

$$F(x)=\int_0^1 xt\,dt = x\int_0^1 t\,dt = \frac{xt^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{x}{2}-0=\frac{x}{2}$$

- variiramo meje integrala:

$$F(x)=\int_0^x t\,dt, \quad x\in\mathbb{R}$$




Tokrat premikamo desno krajišče integrala.

Vprašanje: zakaj je $F(x)>0$ tudi za $x<0$?

odg: ker je leva meja tedaj večja od desne in integrand je negativen.

$$\int_0^x t\,dt = \int_x^0 (-t)\,dt$$

Dodatek:
Iz 1. letnika vemo, da je

$$F'(x)=\left(\int_0^x t\,dt\right)' = x$$

osnovni izrek analize:

$$\frac{\partial\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)}{\partial x} = f(x)$$

Def:
Ko oba načina združimo, v splošnem dobimo predpis

$$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt, \ \text{za } x\in D\subseteq\mathbb{R},\quad u,v:D\to\mathbb{R},$$

$$f: D\times[u(x),v(x)]\to\mathbb{R}, \quad \text{(cont.)}$$

(cont.) kjer je $f$ integrabilna po $t \in [u(x), v(x)]$ za vsak $x \in D$.

Tako definirani fji pravimo integral s parametrom, naš cilj pa je obravnavati njeno zveznost, odvedljivost in integrabilnost preko lastnosti $u, v, f$.

ZAKAJ SO TE INTEGRACIJSKE FJE POMEMBNE:

1. razširjajo nabor elementarnih fj.
   doslej smo spoznali: racion., trig., exp., krož., hip.; njihove inverze, kompozitume njih
   kot „elementarne fje".
   integrali s parametrom razširjajo ta nabor.

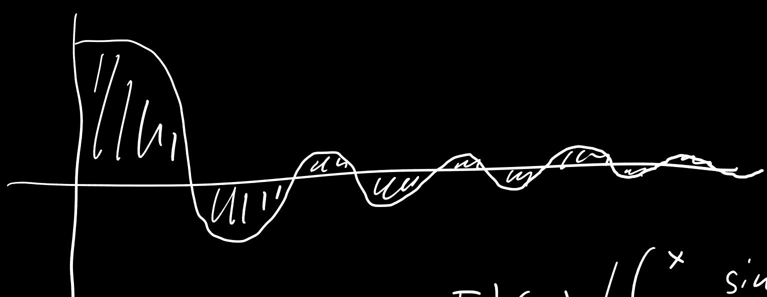
netrivialno dejstvo: $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ni elementarna fja.

(težaven dokaz z računalnikom)

Posledica dejstva:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \\ G(x) &= \int_0^\pi \frac{\sin(xt)}{t}\, dt \end{aligned}\right\} \text{neelementarni fji}$$

$\frac{\sin t}{t}$:



komentar: po osnovnem izreku $F'(x) = \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\right)' = \frac{\sin x}{x}$;
neelementarna fja ima lahko elementaren odvod.

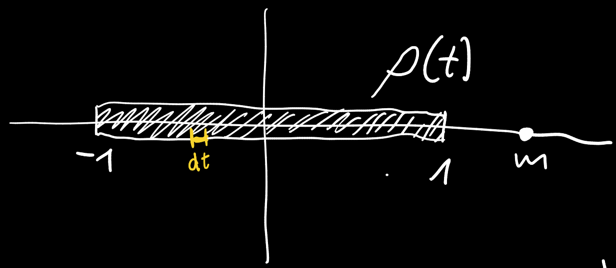

s temi ploščinami je podana neelementarna fja.

Radi bi jo odvajali, a znamo je še

## 2. Modeliranje


sila $F_g = \dfrac{GMm}{r^2}$

imejmo palico z nehomogeno gostoto $\rho(t)$
imejmo delec z maso $m$ na koordinati $x > 1$.




s ~~katero~~ silo palica privlači delec?

$$F(x) = \int_{-1}^{1} \frac{G\rho(t)\, m}{(x-t)^2}\, dt$$

dobimo fjo. ki lahko ima ~~singularnost~~ v $x=1$, ker ima integrand pol stopnje 2, razen če je $\rho(1)=0$.

→ mogoči neobstoj

## 3. Reševanje diferencialnih enačb.

$$y' = y^2 \cos x^3 \quad \text{pri pogoju} \quad y(0)=1$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x^3$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x^3\, dx \qquad /\int$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x^3\, dx \qquad -\frac{1}{y} = \overbrace{\int \cos x^3\, dx}^{\text{ne znamo integrirati}}$$

ni elementarna

zapišimo tot integral s parametrom:

namesto $\int \cos x^3 \, dx$ zapišemo $\int_0^x \cos t^3 \, dt$, saj ima ta fja ustrezen odvod:

$$\cos x^3 = \left(\int_0^x \cos t^3 \, dt\right)$$

torej $-\frac{1}{y} = \int_0^x \cos t^3 \, dt + \tilde{C}$

$$y = \frac{1}{C - \int_0^x \cos t^3 \, dt}$$

zač. pog. $1 = y(0) = \frac{1}{C - \int_0^0 \ldots} = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{1 - \int_0^x \cos t^3 \, dt}$$ (našli smo $C$)

SEDAJ SE LOTIMO ANALIZE TOVRSTNIH fj. za to analizo podajo naslednji trije odvedljiva odvoda izreki:

**Izrek 1:** let $f(x,t)$ zvezna na $[a,b] \times [c,d]$. potem je tudi integral s parametrom $F(x) = \int_c^d f(x,t)\, dt$ zvezen na $[a,b]$.

**Izrek 2:** let $f(x,t)$ zvezna in zvezno parcialno odvedljiva po $x$ na $[a,b] \times [c,d]$. Potem je $F(x) = \int_c^d f(x,t)\, dt$ odvedljiva na $[a,b]$ in za njen odvod velja:

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

; ZOB t.j. lahko odvajamo pod integralom.

Izrek 3: Let $f(x,t)$ zvezna na $[a,b]\times[c,d]$. Tedaj je

$F(x)=\int_c^d f(x,t)\,dt$ integrabilna na $[a,b]$ in velja

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,dt\right)dx =$$

$$= \int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,dx\right)dt \quad ; \text{ tj. lahko integriramo}$$

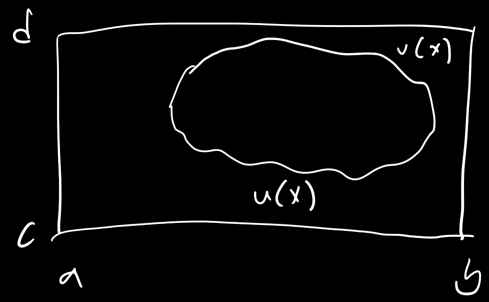
pod integralom zvezno nepravo vrstni red.

Komentarji:

1. Vsi trije izreki se ujemajo le s fiksnimi mejami.

Vendar nam v izreku 1 in 3 ta izjava potrebuje tudi premične meje; če je $f(x,t)$ zvezna na $[a,b]\times[c,d]$ in je $u(x),v(x)\in[c,d]$ za vse $x\in[a,b]$

torej če je območje zveznosti in $u$ in $v$ notri




edina dodatna zahteva je torej zveznost $u,v$.

2. Pri izreku 2 se bolj zaplete (dodaten pogoj parc. odv.)

Več o tem kasneje.

3. V izreku 3 integrabilnost sledi že iz izreka 1, dodatno pa izrek za nepravo mejo.

ILUSTRACIJA IZREKA 1:

a.) $F(x) = \int_0^1 xt\,dt$

$f(x,t) = xt$ zvezna na $\mathbb{R}^2$

posledično lahko prikažemo, da je tudi funkcija $F(x)$

zvezna $\forall x \in \mathbb{R}$.

ker vemo, da je $F(x) = \frac{xt^2}{2}\Big|_0^1$, je to očitno res

$\parallel$

$\frac{x}{2}$ je zvezna na $x \in \mathbb{R}$.

b.) $F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$

integrand $f(x,t) = e^{xt}$ je zvezen na $\mathbb{R}^2$.

prikažemo zveznost $F(x)$ na $\mathbb{R}$.

poskusimo preveriti direktno:

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt = \frac{e^{xt}}{x}\Big|_0^1 = \frac{e^x-1}{x}$$

problem je v $x=0$. $F(0) = \int_0^1 e^{0\cdot t}dt = \int_0^1 1\,dt = 1$

torej je naša $F$ podana s predpisom

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

a je to zvezna fja, kot bi pričakovali?

da, kajti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \checkmark$$

Dokaz izreka 1:

spomnimo: * $F$ zvezna v $x_0 \in [a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0$
$\forall x \in D_F : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$

** $f$ zvezna v $(x_0, t_0) \in [a,b] \times [c,d] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta((x_0, y_0), \varepsilon) > 0$
$\forall a \in D_f : \|(x_0, y_0) - a\| < \delta \Longrightarrow$
$|f(x_0, y_0) - f(a)| < \varepsilon$

** je predpostavka, * dokazujemo.

BSŠ $\delta$ v ** je zvezno odvisna od $x_0$ do $t_0$.

ker nas zanima $t_0 \in [c,d]$. $\exists \delta$,

ki je minimum $\delta := \min_{t_0 \in [c,d]} \delta(x_0, t_0)$

najmanjši med vsemi pri fiksnem $\varepsilon > 0$.